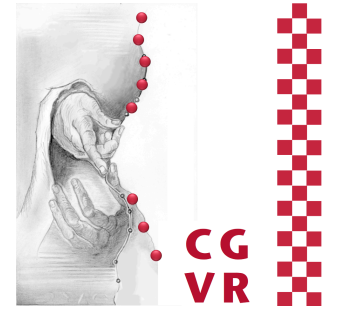


Bremen



# Computer-Graphik I

## Farben



G. Zachmann

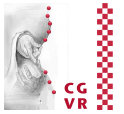
University of Bremen, Germany

[cgvr.cs.uni-bremen.de](http://cgvr.cs.uni-bremen.de)





# Warum ist Farbsehen so wichtig?

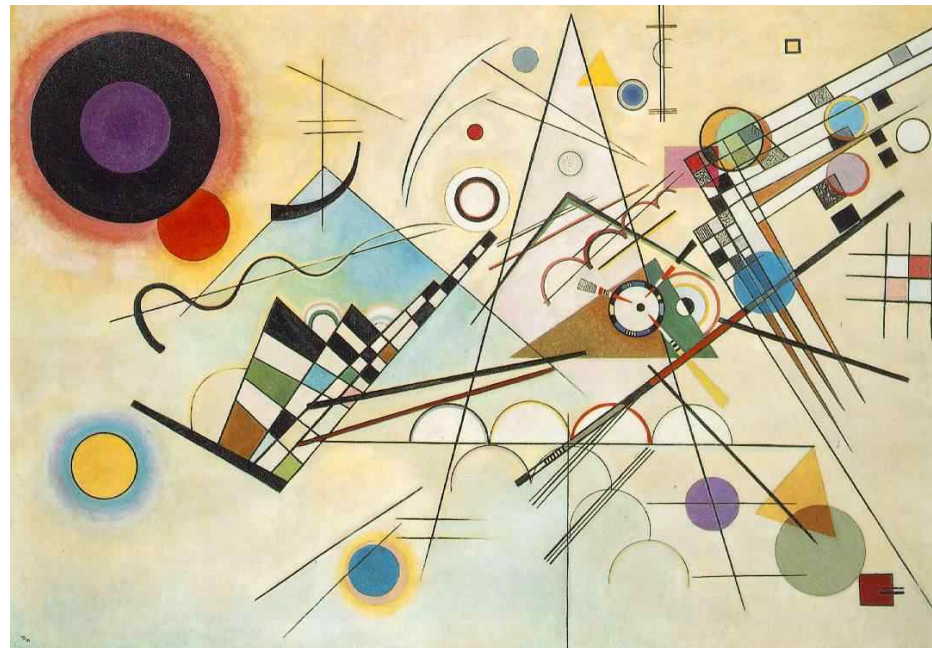


- Here you see a black-and-white version of a jungle scene. Try to find the predator that's about to jump out at you. If it takes you more than a second, you are dead!



Die Farbe ist ein Mittel, direkten Einfluss auf die Seele auszuüben.  
Die Farbe ist die Taste, das Auge ist der Hammer.  
Die Seele ist das Klavier mit vielen Saiten.  
Der Künstler ist die Hand, die durch diese oder jene Taste  
zweckmäßig die menschliche Seele in vibration bringt.

Wassily Kandinsky (1866 – 1944)



- Farben sind eine Wissenschaft für sich:
  - Es gibt sehr viele Farbräume
  - Involviert Physik, Biologie / Physiologie, Wahrnehmungspsychologie
    - Oft nicht leicht zu erkennen, in welchem Gebiet man sich gerade bewegt
  - Sehr viele Begriffe

- Fredo Durant:

- *Color is both quite simple and quite complex*
- *There are two options to teach color:*
  - *Pretend it all makes sense and it's all simple*
  - *Expose the complexity and arbitrary choices*
- *Unfortunately, I have chosen the latter ...*

- Vereinfachung hier: keine lichttechnischen/photometrischen Größen



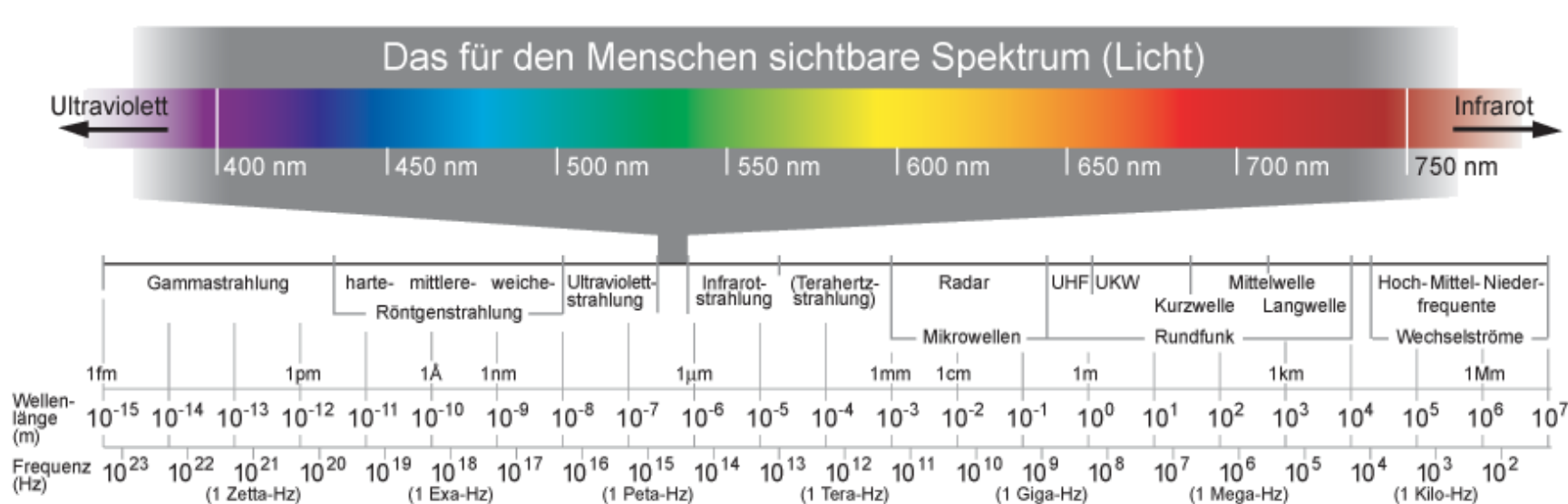
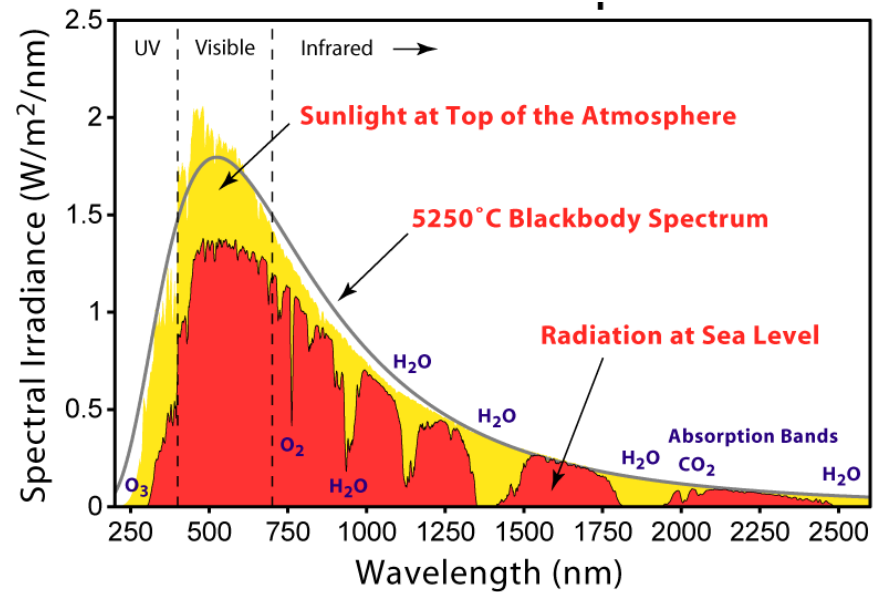
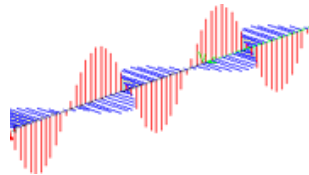
- Foley / van Dam, Peter Shirley, Rogers (s. Homepage der VL)
- Gary W. Meyer: *Tutorial on color science*  
(siehe Link auf der Homepage der Vorlesung)



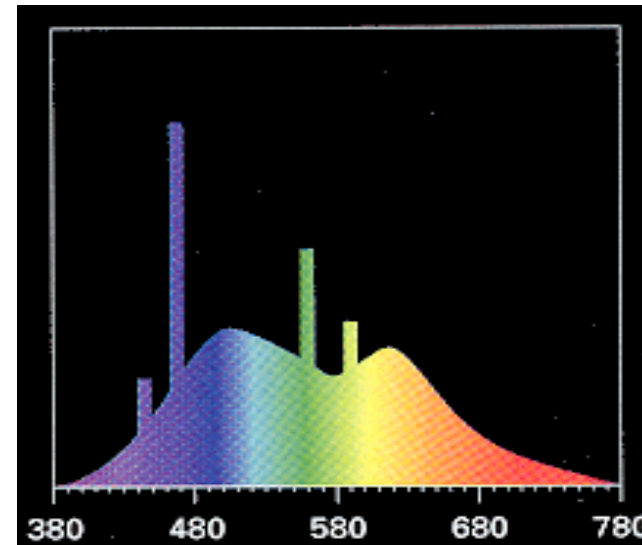
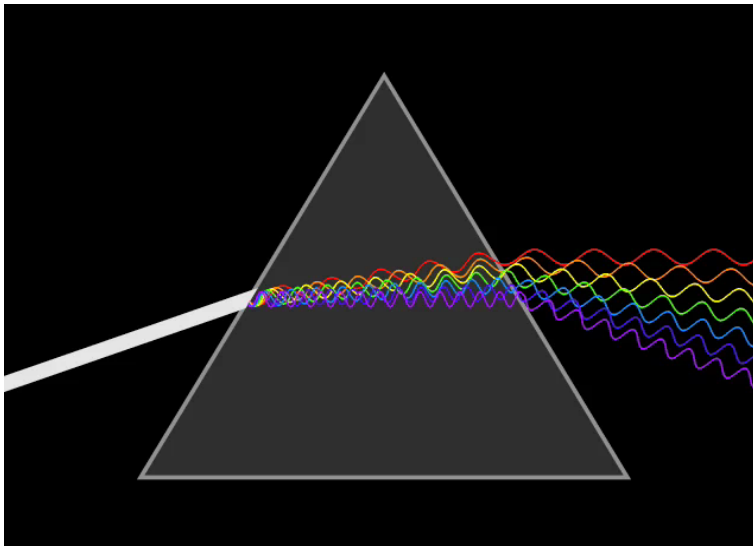
# Was ist Licht?



- **Licht** = elektromagnetische Strahlung / Energie im für den Menschen sichtbaren **Spektralbereich: 380 – 780 nm**



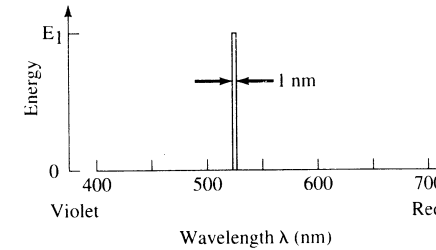
- Licht entsteht durch Emission von elektromagnetischer Strahlung
  - Normalerweise durch hohe Temperatur, z.B.: Sonne, Kerze, schwarzer Strahler, ...
  - Ausnahmen: Fluoreszenz, Laser, ...
- Eine Lichtquelle hat (fast) immer ein komplettes Spektrum:



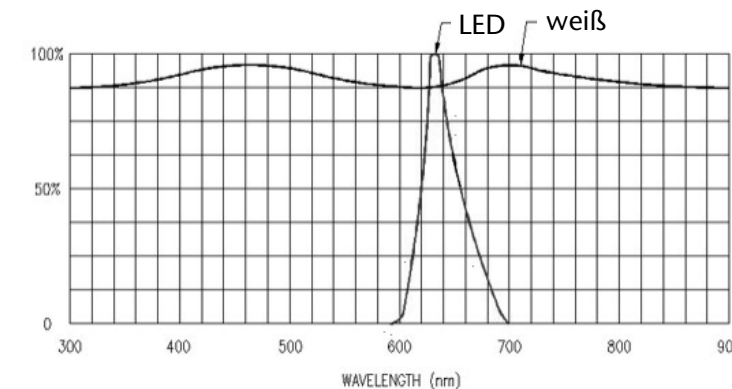
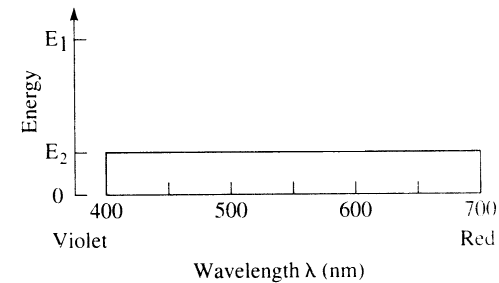
Leuchtstoffröhre

# Chromaticity ("Chromatizität")

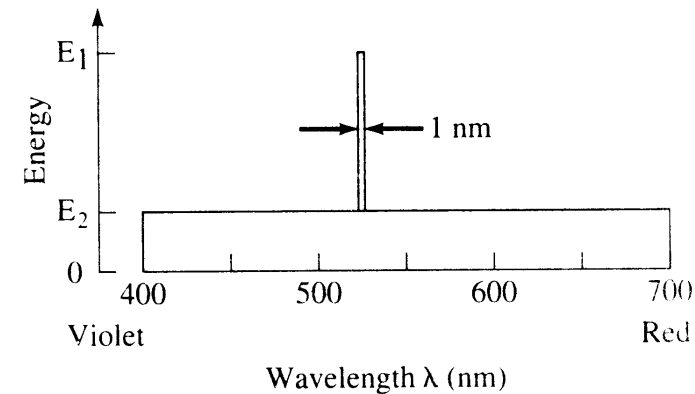
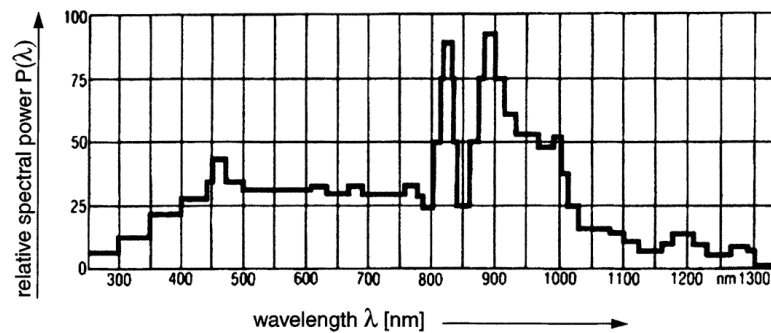
- **Monochromatisches** Licht = genau 1 Wellenlänge (Laser)



- **Achromatisches** Licht = alle Wellenlängen ungefähr gleich stark → weiß



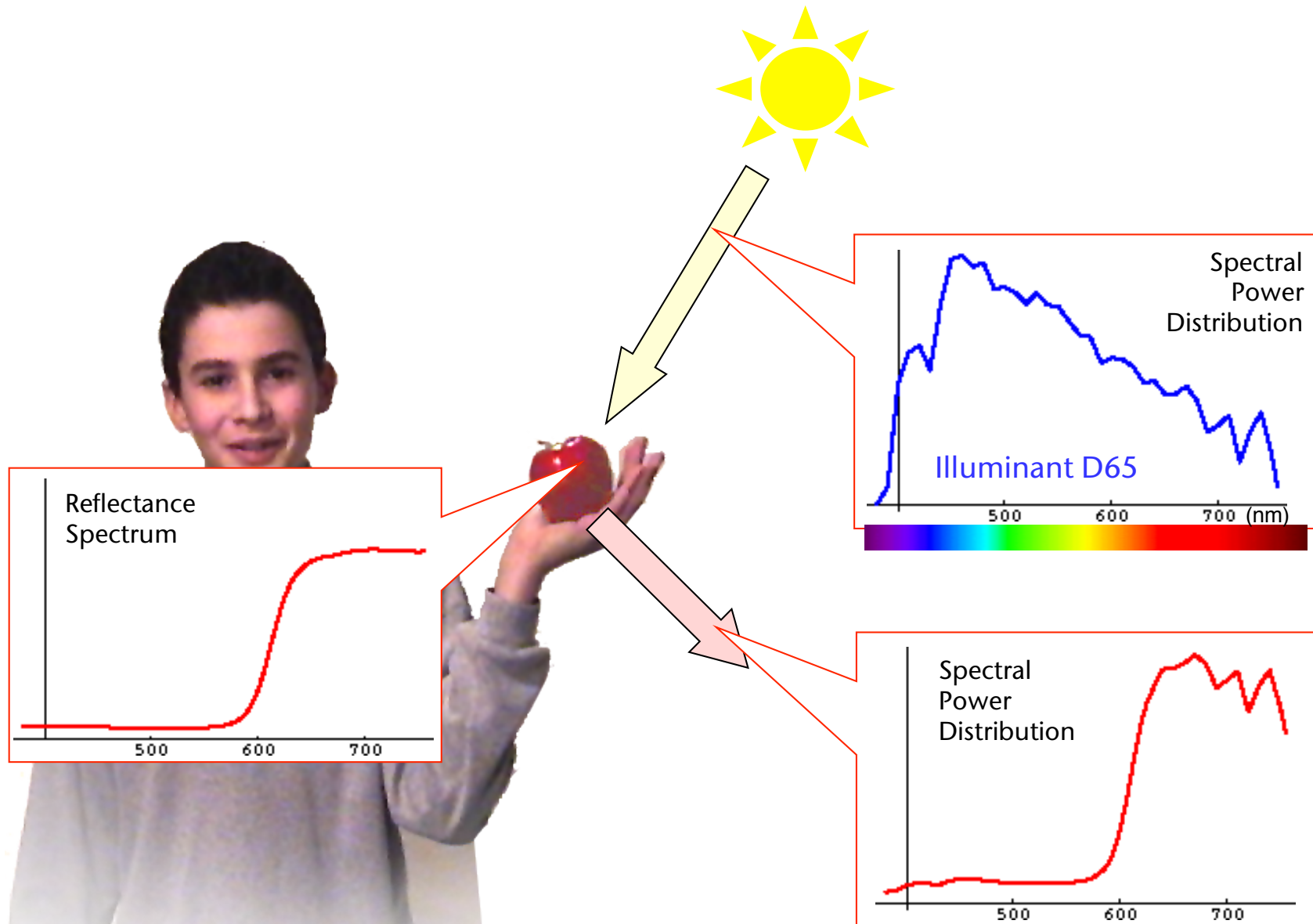
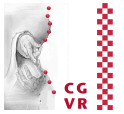
- **Chromatisches** Licht: ganzes Spektrum, eine dominante Wellenlänge (farbiges Licht)



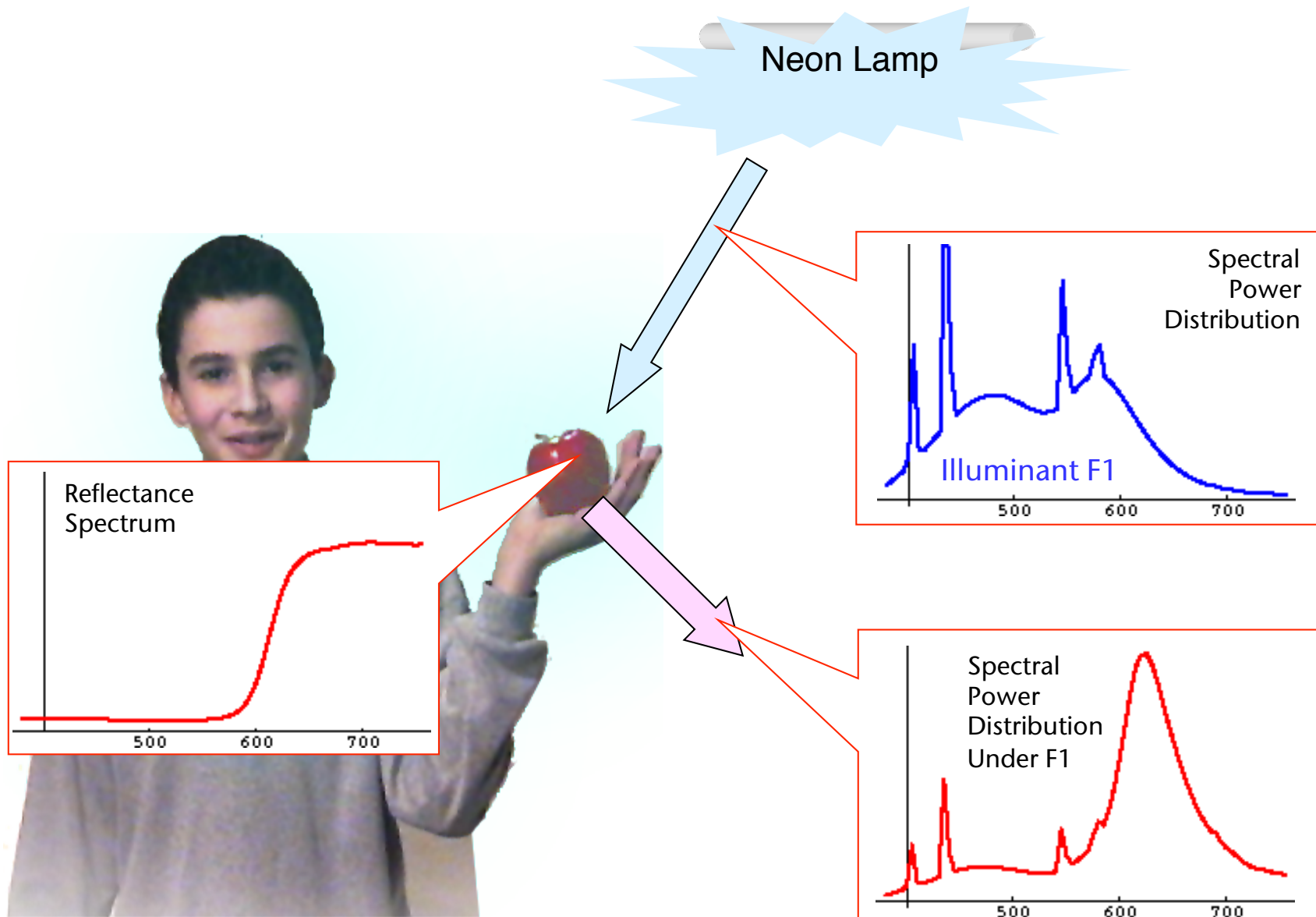
- Wesentliche, beschreibende Charakteristika:
  1. Dominante Wellenlänge = "Farbe", *Hue*
  2. Verhältnis  $E_1 / E_2$  = Anteil des weißen Lichtes = Reinheit, *Sättigung*, *Saturation*
  3. Fläche unter der Spektralkurve = Helligkeit = *Intensität*, *Brightness*



# Das Licht auf dem Weg ... (das *Reflectance Spectrum*)



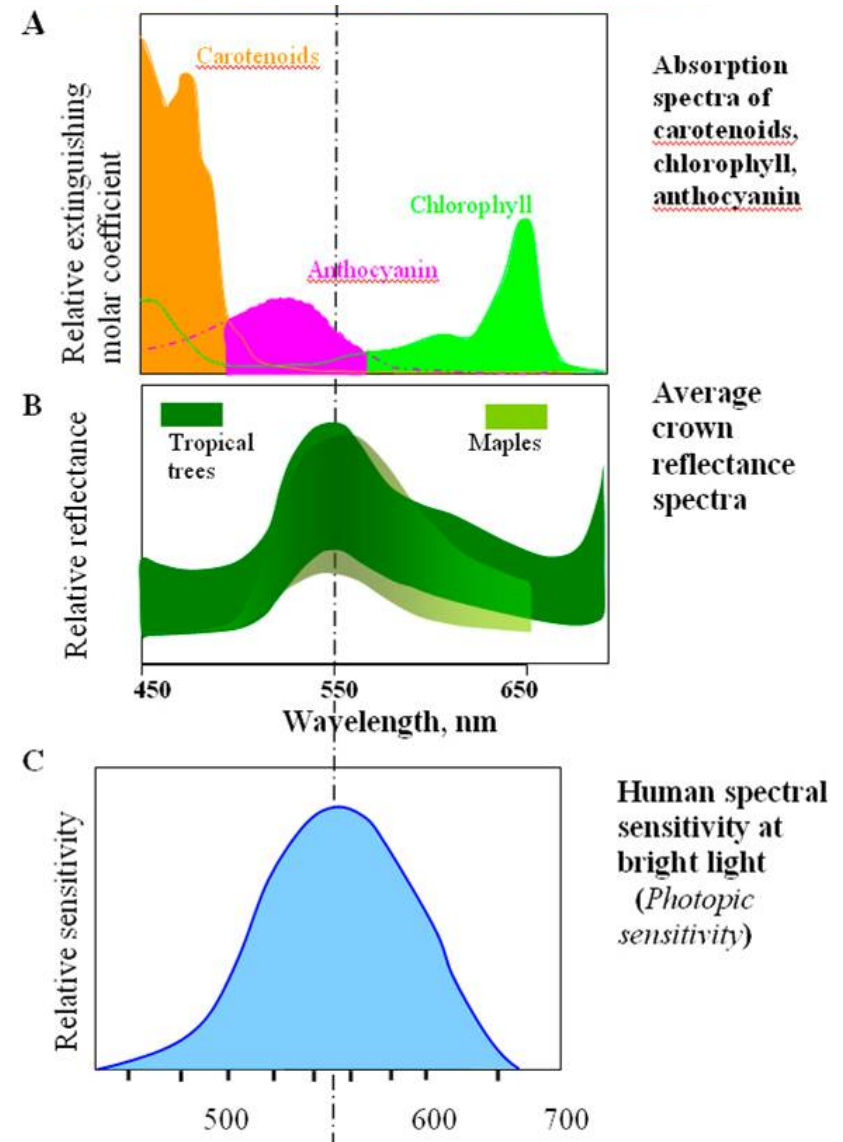




# Warum ist der Wald grün?



- Weil der grüne Teil des Spektrums nicht absorbiert wird:
- Würden Pflanzen alle Wellenlängen gleich gut absorbieren, sähe das so aus:

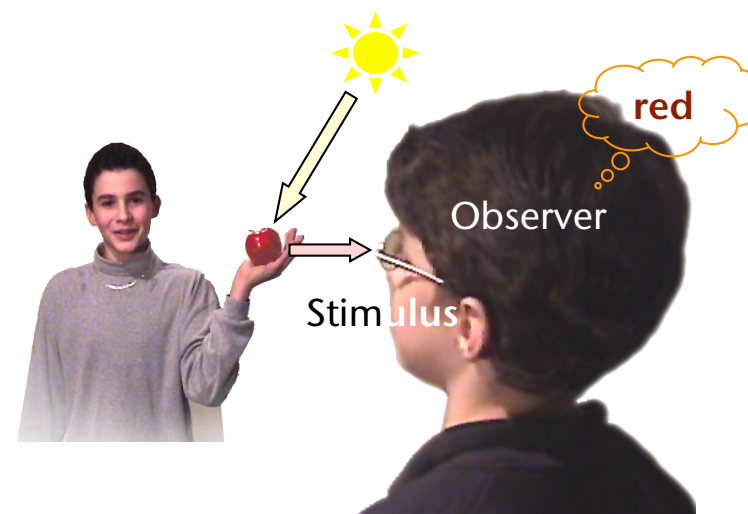


# Woher kommen die Farben?

- Kennen Sie diese Szene?
  - "There is no spoon":

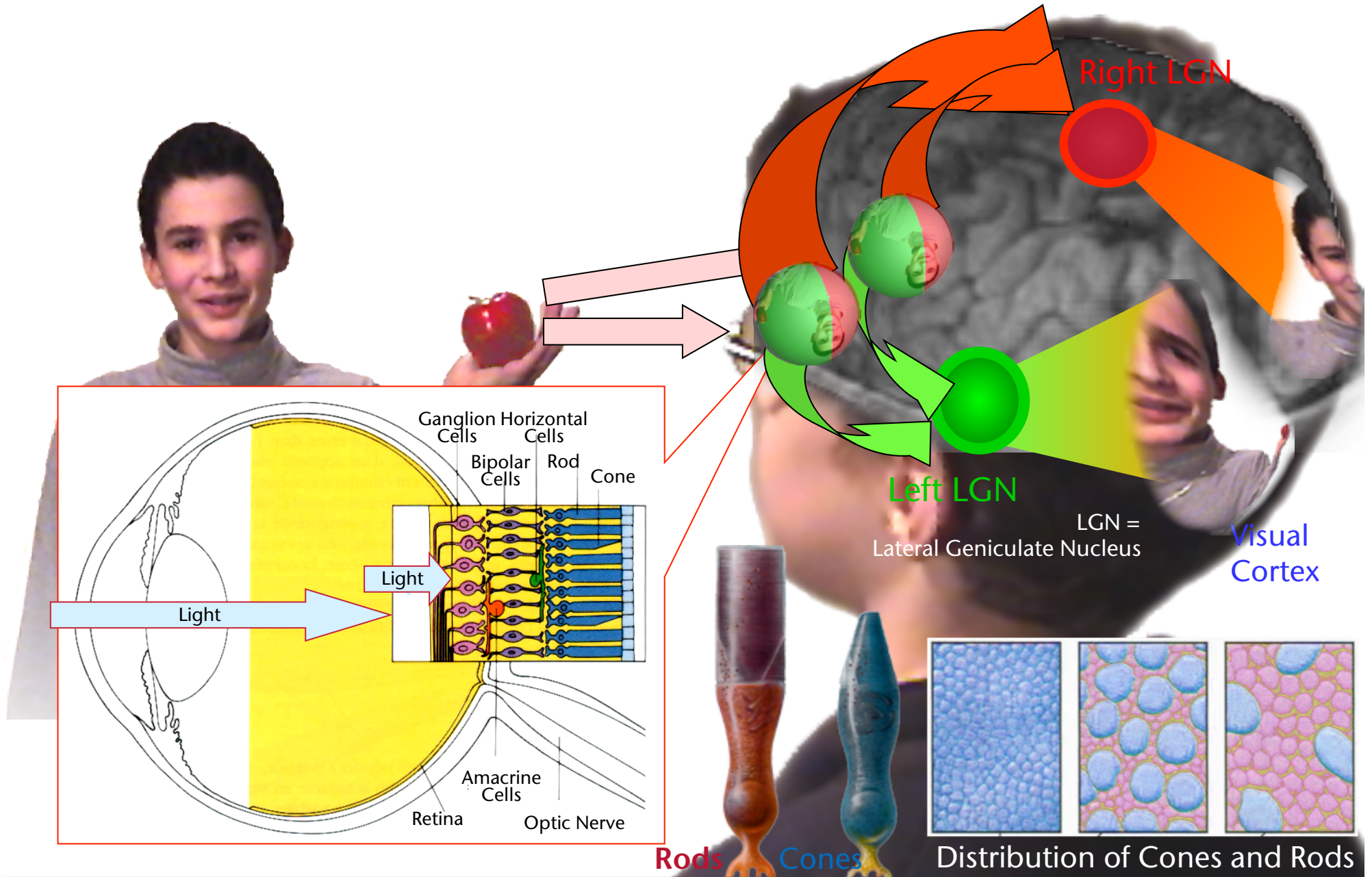


- Merke: **ES GIBT KEINE FARBEN!**
  - In der physikalischen Welt gibt es nur Spektren!
  - "Farben" entstehen erst im Auge! (genauer gesagt: im Kopf)

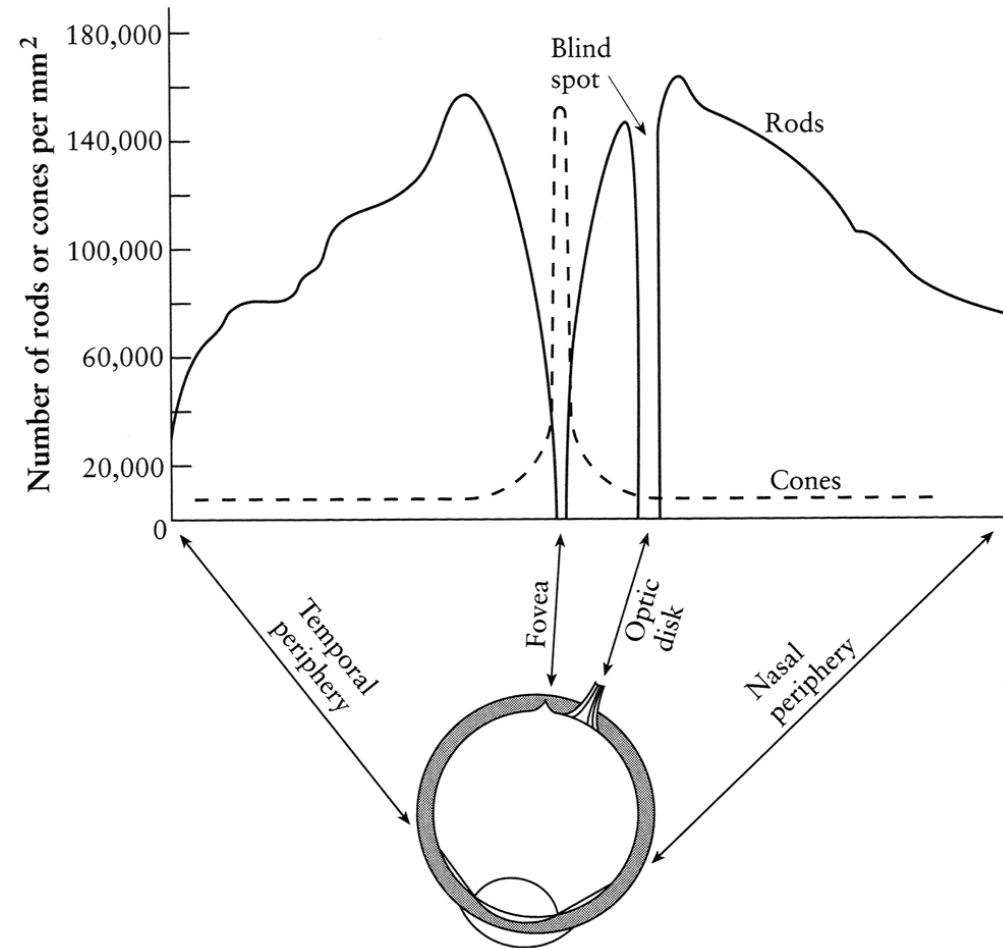




# Das Auge



- Das räumliche Auflösungsvermögen (*visual acuity*) nimmt zum Rand der Netzhaut ab
- **Fovea** = kleine Region auf der Netzhaut mit höchster Cones-Dichte und ohne Rods, ca. 1-2°





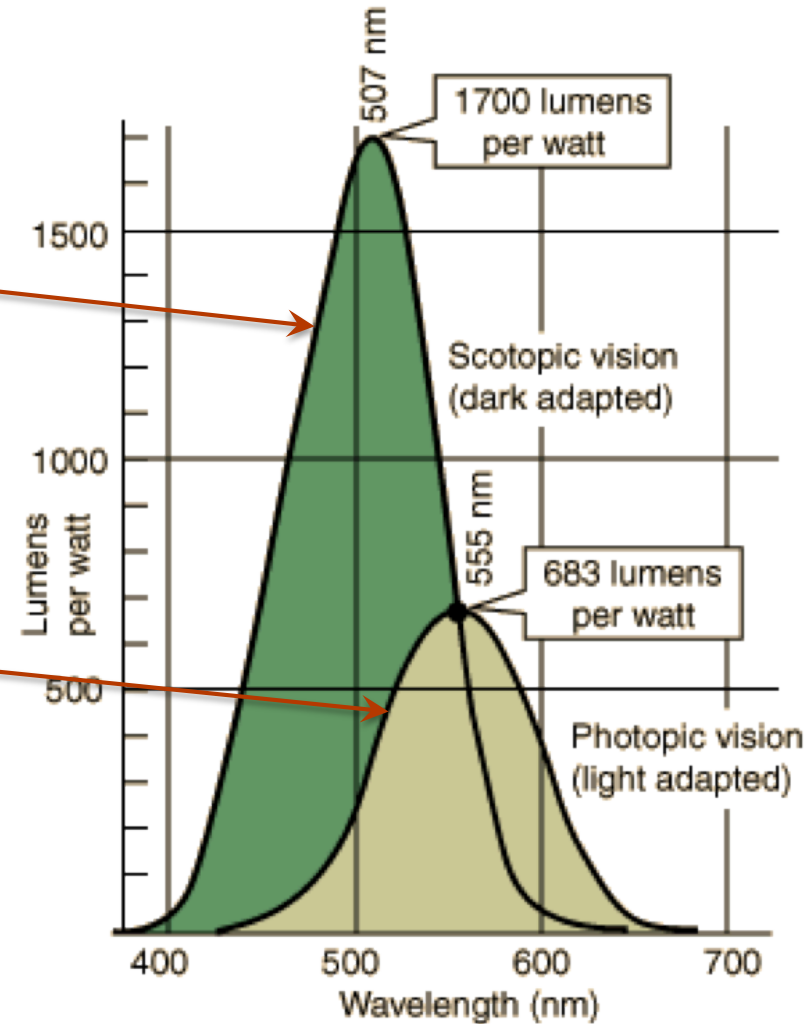
- Wenn man ein Bild so vorverzerrt, dass die lokale Auflösung der im Auge entspricht, sieht es ungefähr so aus:





# Human Spectral Sensitivity

- Nachts: **scotopic vision**  
durch *Rods* (Stäbchen)
- Tags: **photopic vision**  
durch *Cones* (Zäpfchen)



- Daher: *"Nachts sind alle Katzen grau."*

# Auflösung der Quizfrage

- Welche Farbe sollte die Instrumentenbeleuchtung z.B. auf einer Schiff-Brücke bei *Nacht* haben?

→ Ca. 650-700 nm



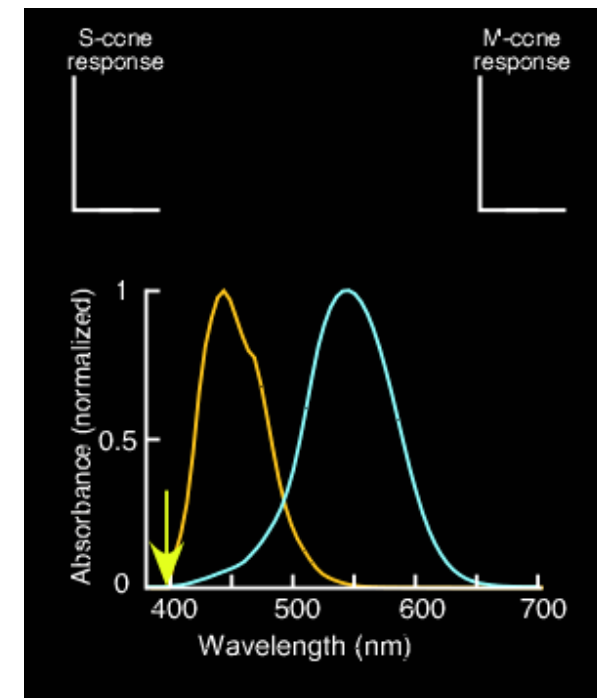
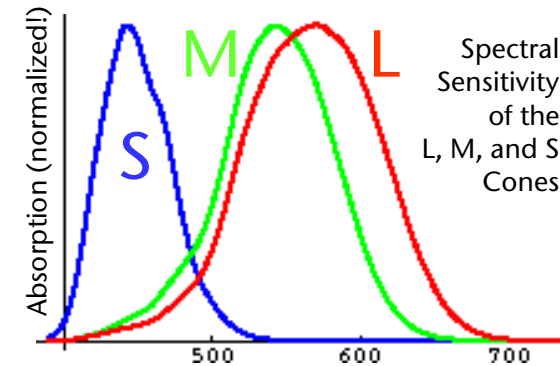
## Einige (erstaunliche) Unterschiede zwischen Rods und Cones

The rods are more numerous of the photoreceptors, some 120 million, and are the more sensitive than the cones. However, they are not sensitive to color. They are responsible for our dark-adapted, or scotopic, vision. The rods are incredibly efficient photoreceptors. More than one thousand times as sensitive as the cones, they can reportedly be **triggered by individual photons under optimal conditions**. The optimum dark-adapted vision is obtained only after a considerable period of darkness, say 30 minutes or longer, because the rod adaption process is much slower than that of the cones. The rod sensitivity is shifted toward shorter wavelengths compared to daylight vision, accounting for the growing apparent brightness of green leaves in twilight. While the visual acuity or visual resolution is much better with the cones, the rods are better motion sensors. Since the rods predominate in the peripheral vision, that peripheral vision is more light sensitive, enabling you to see dimmer objects in your peripheral vision. If you see a dim star in your peripheral vision, it may disappear when you look at it directly since you are then moving the image onto the cone-rich fovea region which is less light sensitive. You can detect motion better with your peripheral vision, since it is primarily rod vision.

[Hecht, Eugene: *Optics*. 2<sup>nd</sup> ed, Addison Wesley, 1987, Section 5.7]

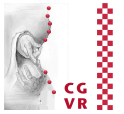
# Cone Spectral Sensitivity

- 3 Arten von Cones: L-, M-, S-Cones; steht für "long", "medium", "short wavelength"
- Jede Cone-Art hat eine eigene Empfindlichkeitskurve; Maxima entsprechen **ungefähr** Gelb, Grün, Blau
- Erstaunlich:
  - Manche Tiere sehen UV- oder IR-Licht
  - Der Fangschreckenkrebs hat 8 verschiedene Cones im sichtbaren Bereich und 4 im UV!
  - Hund und Katze haben nur 2 Cone-Arten (blau & rot)
  - Es gibt mögl.weise(!) **Tetrachromaten!**
    - (Wenn, dann nur Frauen ...)



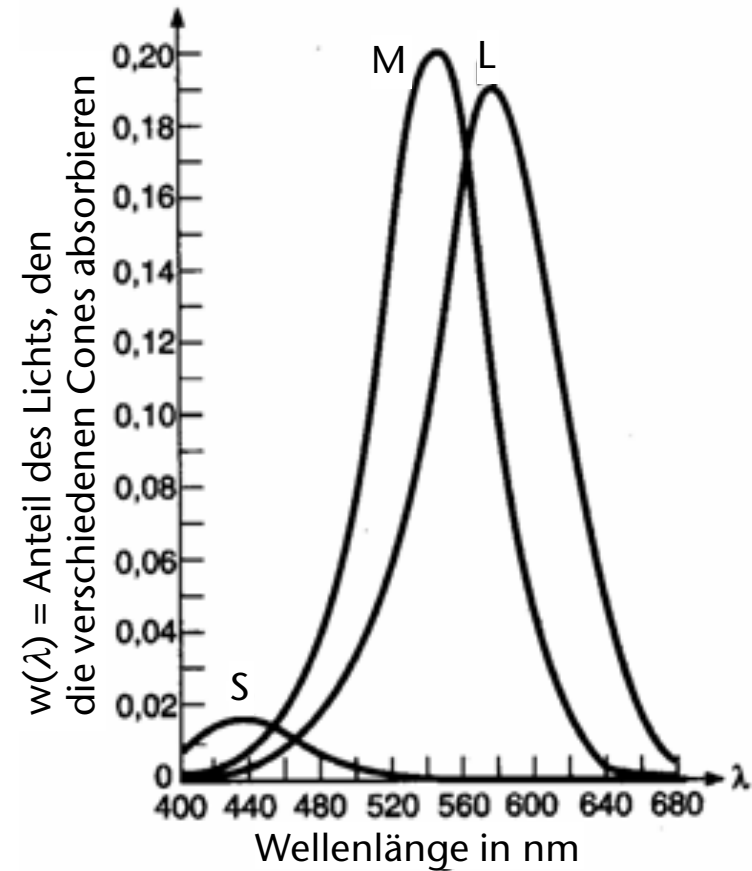
Animation

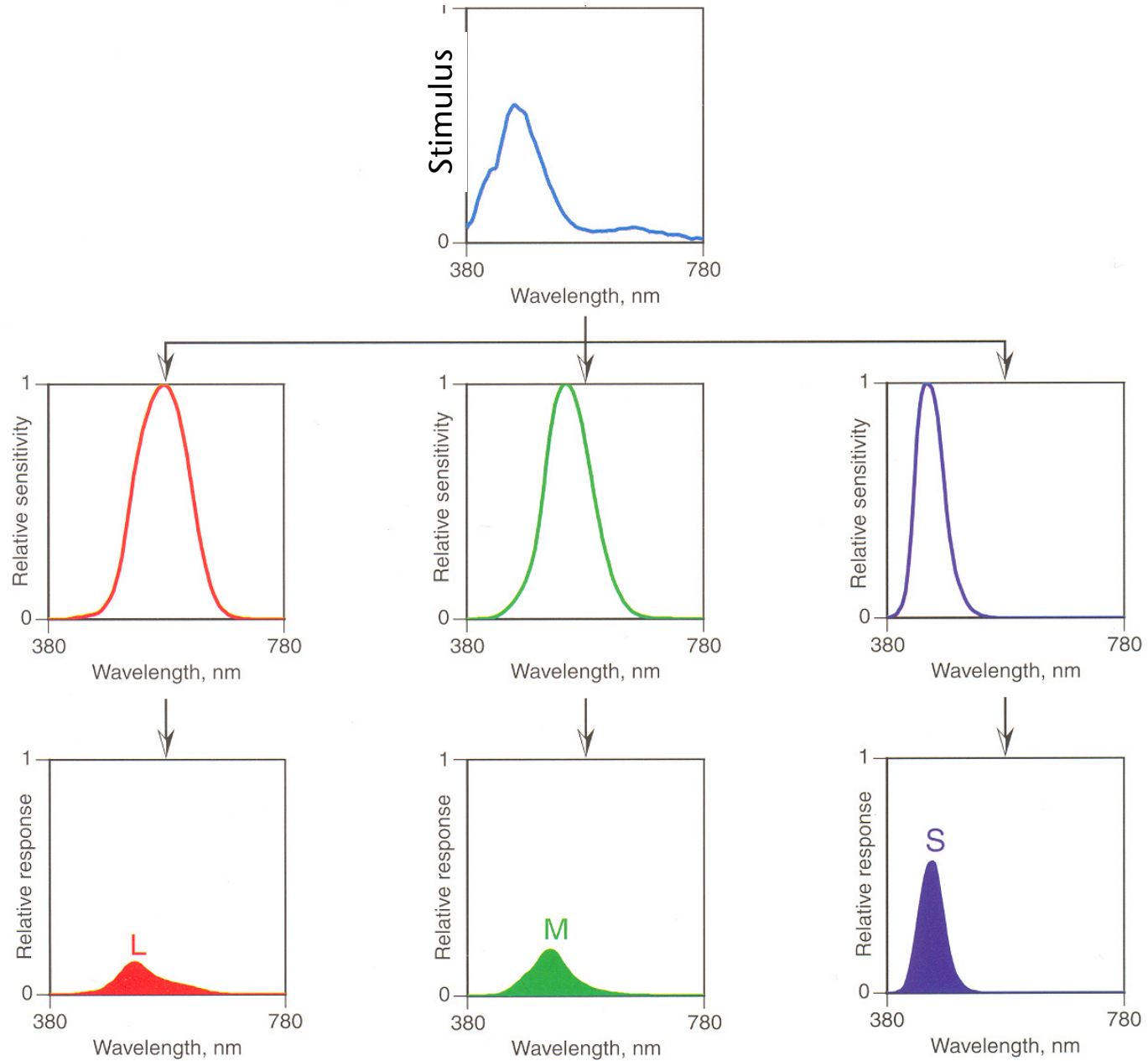
# Der wahrgenommene Stimulus



- Die "wahren" Empfindlichkeitskurven
- Der "Output" (*Response*) eines Cones:
  - Sei  $P(\lambda)$  das Spektrum des einfallenden Lichtes
  - Sei  $w(\lambda)$  die Empfindlichkeitskurve
  - Dann ist die Antwort des Cones:

$$\Phi = k \int_{380\text{nm}}^{780\text{nm}} w(\lambda) \cdot P(\lambda)$$







- Achtung: Cones können keine Farben "sehen"!

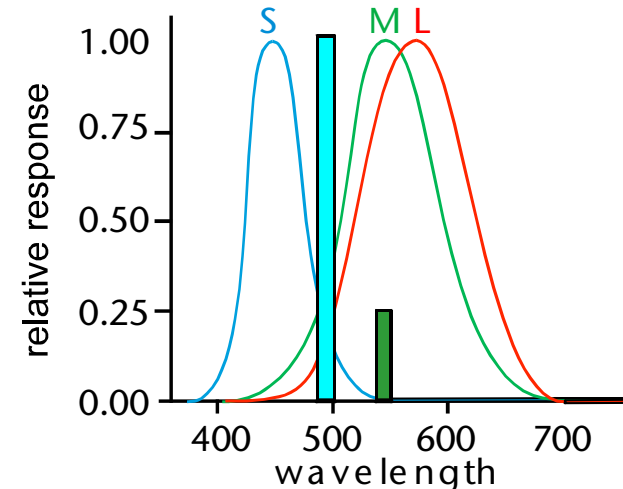
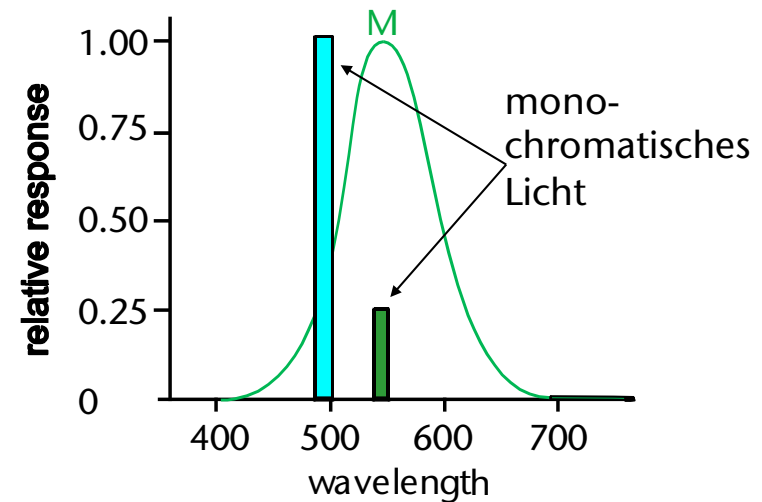
- Beispiel:

- Verschiedene Wellenlänge, aber trotzdem gleiche Response
- Wg. verschiedener Intensität

- Aber: mit mehr Cone-Arten kann man mehr Farben unterscheiden!

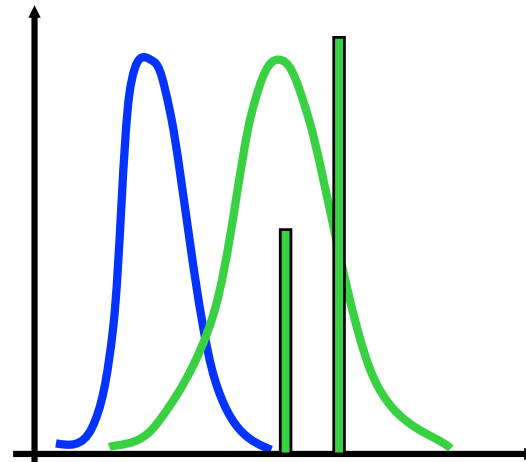
- Beispiel:

- Stimulus wie oben
- Verschiedene Cones liefern verschiedene Response

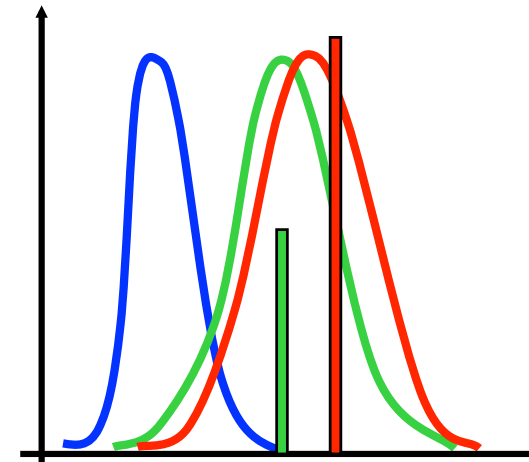


# Farbenblindheit

- Klassischer Fall: eine Cones-Art fehlt
- Z.B.: "rote" Cones fehlen



Gleiche Response

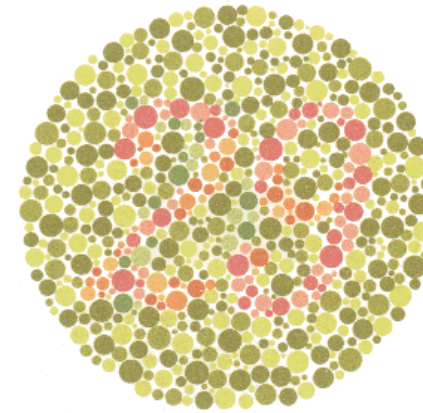


Wird differenziert

- Folge: Rot-Grün-Blindheit
- Häufigkeit:
  - 99% aller Farbsehschwächen, 10% aller Menschen sind rot-grün-blind
  - Davon 90% Männer, 10% Frauen

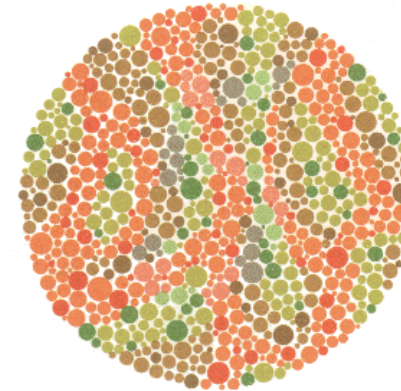
## 1. Beispiel:

- Normalsichtige sehen hier "29"
- Rot-grün-Blinde sehen hier "70"



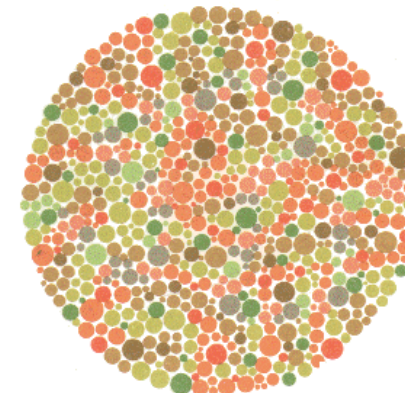
## 2. Beispiel:

- Normalsichtige sehen hier nichts
- Rot-grün-Blinde sehen hier "5"

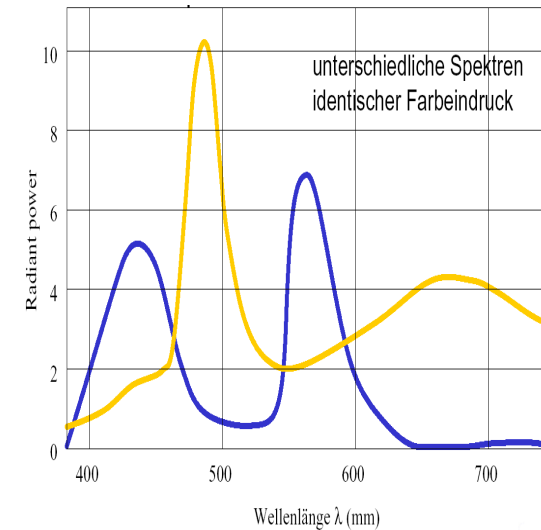


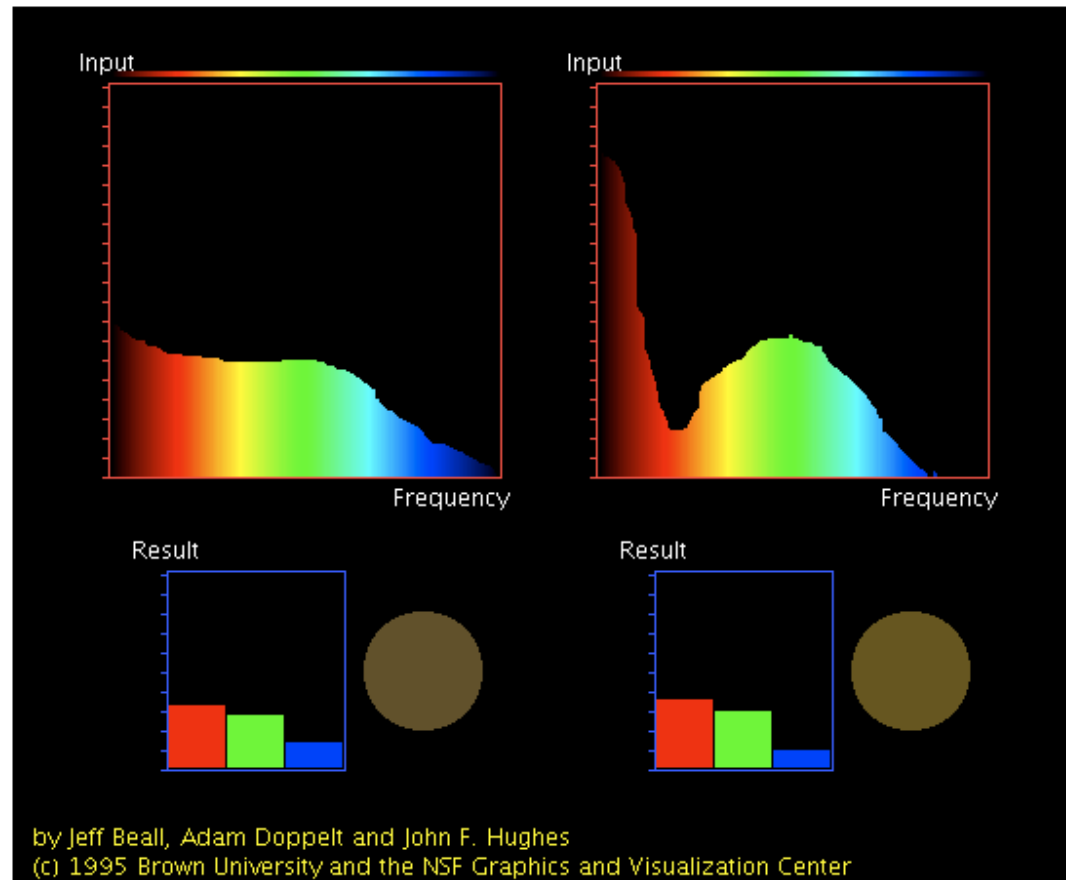
## 3. Beispiel:

- Normalsichtige: nichts
- Rot-grün-Blinde: eine Art Irrweg von links nach rechts



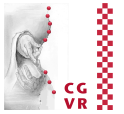
- Merke: wir sind alle "farbenblind"!
- Man kann unendlich viele Paare von Spektren konstruieren, so daß die selbe Response für alle 3 Cones entsteht
- Solch ein Paar von Spektren heißt **Metamer**
- Hintergrund:
  - Die Menge aller Spektren ist ein unendlich-dim. Raum
  - Die Wahrnehmung durch 3 Sensor-Arten (Cones) stellt eine Projektion auf einen 3-dim. Raum dar!
  - Folge: man verliert Information
- Das Gute daran: nur so ist es möglich, mit nur 3 Primärfarben im Monitor (fast) alle Farbeindrücke zu "erzeugen", die wir sehen können!



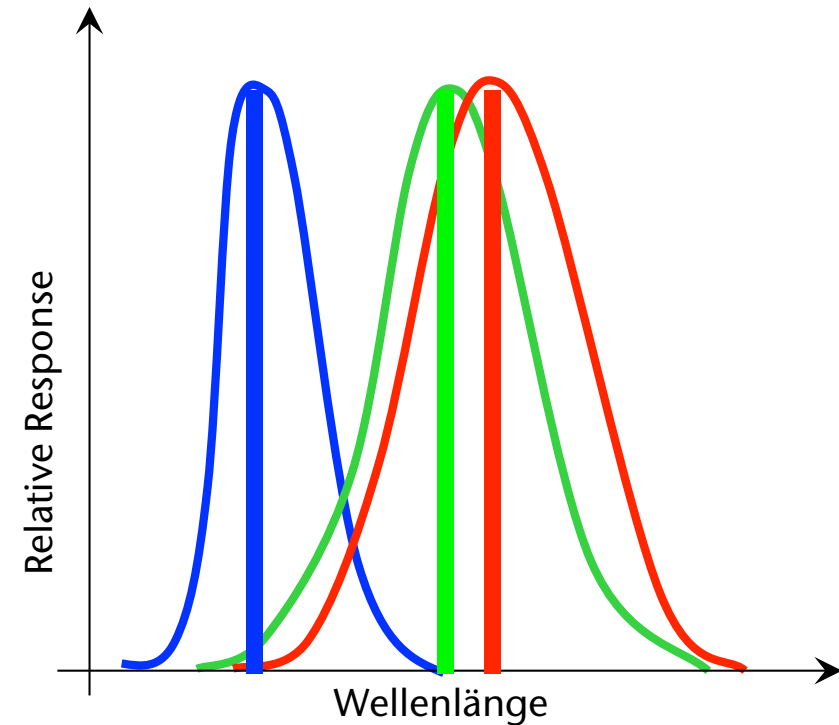


[http://www.cs.brown.edu/exploratories/freeSoftware/catalogs/color\\_theory.html](http://www.cs.brown.edu/exploratories/freeSoftware/catalogs/color_theory.html)

# Ein kleiner Trugschluss

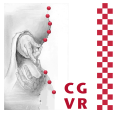


- Welche monochromatischen Lichtquellen soll man im Monitor wählen, und wie berechnet man deren Lichtstärke?
- Man könnte folgende Idee haben:
  - Wähle Phosphore im Monitor so, daß diese genau eine Wellenlänge abstrahlen, die genau den Peaks der Empfindlichkeitskurven der menschlichen Cones entsprechen
  
- Leider **KLAPPT DAS NICHT**

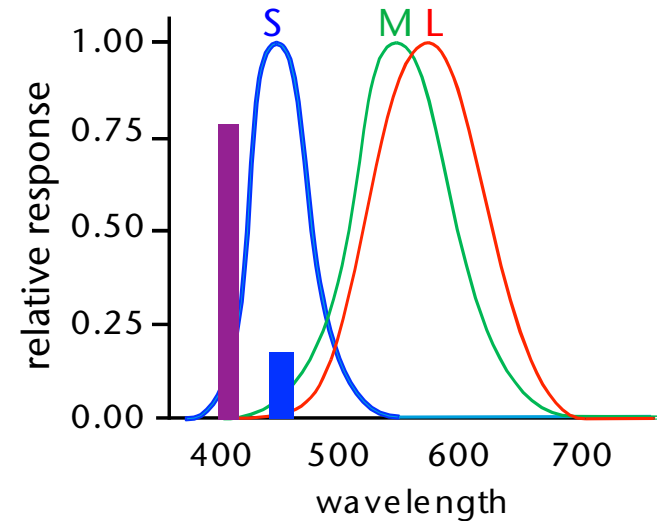
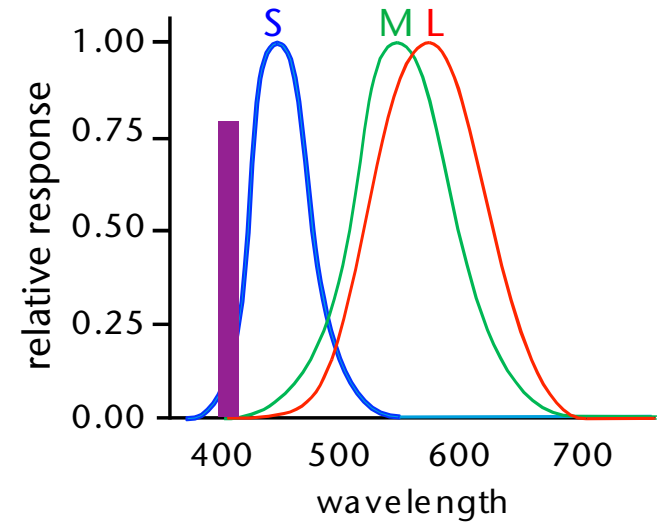




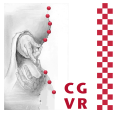
# Gegenbeispiel



- Versuche, folgenden Stimulus mit den 3 o.g. monochromatischen Lichtquellen zu erzeugen:
  - Synthese: Integriere den geg. Stimulus mit den 3 Empfindlichkeitskurven
  - Ergibt hier:  $0.2 \times S$ -Phosphor
  - Monitor: "S"-Pixel mit Stärke 0.2 anschalten
  - Analyse: im Auge werden die anderen beiden Cones **doch** erregt
  - Ergibt **andere** Farbe!
  - Grund: die Kurven überlappen sich, sind also **korreliert (gekoppelt)**!



# Entwicklung standardisierter Farbräume



- Quantitative und wiederholbare Bestimmung von Farben ist zwingend notwendig in vielen Industriezweigen:
  - Fernsehen, Druck, Farbenhersteller, Leuchtenhersteller, ...
- Wurde ca. 1920 begonnen von der CIE
  - = Commission Internationale de l'Eclairage
- Erster Standard-Farbraum 1931 von der CIE: CIEXYZ-Farbraum

- Seien

$$s(\lambda), m(\lambda), l(\lambda) : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$$

die Response-Kurven der S-, M-, und L-Sensoren

- Annahme:

- Wir leuchten mit 3 Primärlichtquellen R, G, B auf eine perfekt weiße, perfekt diffuse Fläche
- Bei voller Leuchtstärke gelangen davon die Spektren

$$R(\lambda), G(\lambda), B(\lambda)$$

ins Auge

- Diese Spektren können "gedimmt" werden mit Skalaren

$$r, g, b \in [0, 1]$$

(z.B. durch teilweise Abschattung)

- Welche Signalstärke kommt jeweils von den Sensoren ins Gehirn?

- Sei  $A$  das Misch-Spektrum von der weißen, diffusen Fläche:

$$A(\lambda) = r \cdot R(\lambda) + g \cdot G(\lambda) + b \cdot B(\lambda)$$

- Erinnerung: Sensoren liefern die "gewichtete Fläche"
- Sei  $S_A$  die Antwort des S-Sensors auf das Spektrum  $A$ :

$$\begin{aligned} S_A &= \int s(\lambda) A(\lambda) d\lambda \\ &= \int s(\lambda) (rR(\lambda) + gG(\lambda) + bB(\lambda)) d\lambda \\ &= r \int s(\lambda) R(\lambda) d\lambda + g \int s(\lambda) G(\lambda) d\lambda + b \int s(\lambda) B(\lambda) d\lambda \\ &= rS_R + gS_G + bS_B \end{aligned}$$

- Analog für  $M_A$  und  $L_A$

- Zusammen:

$$\begin{pmatrix} S_A \\ M_A \\ L_A \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} S_R & S_G & S_B \\ M_R & M_G & M_B \\ L_R & L_G & L_B \end{pmatrix}}_M \cdot \begin{pmatrix} r \\ g \\ b \end{pmatrix}$$

$$= M \cdot \begin{pmatrix} r \\ g \\ b \end{pmatrix}$$

- Matrix  $M$  beschreibt also eine Art "Sensor-Abbildung", nämlich von den physikalischen Größen  $r, g, b$  (der "Skalierung" der Primärlichtquellen) auf die physiologischen Größen  $S_A, M_A, L_A$  (den Sensor-Outputs)

- Bemerkung: die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} S_R & S_G & S_B \\ M_R & M_G & M_B \\ L_R & L_G & L_B \end{pmatrix}$$

ist (für ein bestimmtes Auge) konstant!

- Bemerkung: für eine bestimmte Sensorantwort  $(S_C, M_C, L_C)$  ist die notwendige Skalierung  $r, g, b$  unserer (fest) gewählten Primärlichtquellen eindeutig bestimmt
  - Spektrum  $C$  und Spektrum  $r \cdot R + g \cdot G + b \cdot B$  sind **Metamere!**
- Achtung: keine Garantie, daß diese  $r, g, b \in [0, 1]$  wären!!

# Definition des Begriffs "Farbe"

- Definition **Farbe**:

Sei  $C$  eine Lichtquelle mit *irgendeinem* Spektrum.

Mit der "**Farbe  $C$** " meinen wir die Sensorantwort  $(S_C, M_C, L_C)$ , m.a.W., die **Farbe  $C$**  ist eigtl. nur eine **Kurzschreibweise** für den Vektor  $(S_C, M_C, L_C)$ !

- Mit dieser Kurzschreibweise kann man nun die vorige Formel

$$\begin{pmatrix} S_C \\ M_C \\ L_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_R & S_G & S_B \\ M_R & M_G & M_B \\ L_R & L_G & L_B \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r \\ g \\ b \end{pmatrix}$$

so schreiben:

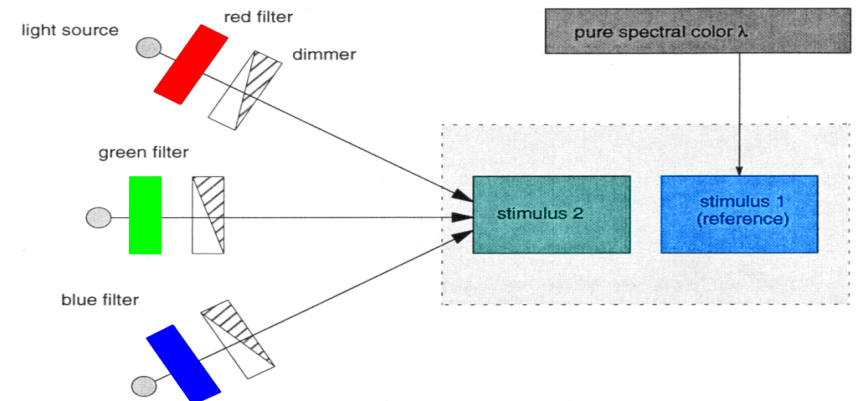
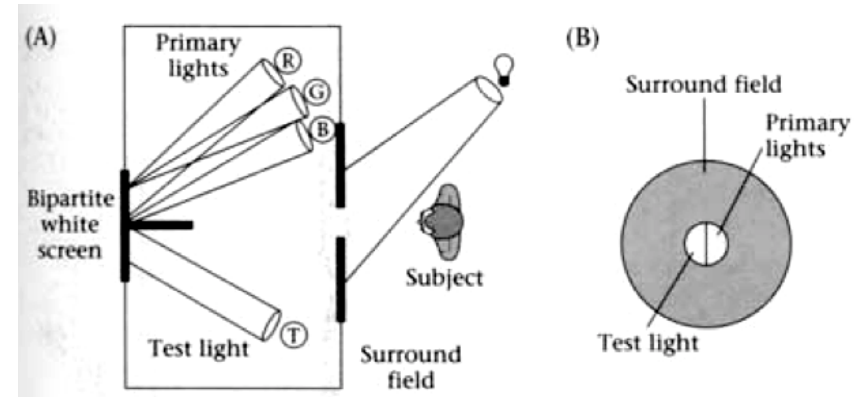
$$C = rR + gG + bB$$

- **Achtung:**  $C$ ,  $R$ ,  $G$  und  $B$  sind hier in Wahrheit Sensor-Output-Vektoren, und das "=" ist in Wahrheit ein "=" zwischen Vektoren!

- Gegeben:
  - Primärlichtquellen  $R, G, B$
  - Monochromatische Testlichtquelle  $C_\lambda$  mit genau der Wellenlänge  $\lambda$
  - User soll mit den Reglern  $r, g, b$  die Farbe  $C_\lambda$  matchen, d.h.

$$C_\lambda \text{ "==" } r_\lambda R + g_\lambda G + b_\lambda B$$

- Definition: die Werte  $r_\lambda, g_\lambda, b_\lambda$  nennt man **Tristimulus-Werte** (bzgl. festgelegter  $R, G, B$  !)





- Beobachtung 1:  
Das geht mit (fast) allen  $C_\lambda$  (und Helligkeiten von  $C_\lambda$ ),  
vorausgesetzt:
  - $R, G, B$  sind halbwegs weit über das Spektrum verteilt; und
  - keine der 3 Primärfarben läßt sich durch Kombination der anderen beiden erzeugen
  
- Problem: man kann so **nicht alle** Farben erzeugen!

- Trick / Beobachtung: es klappt aber, wenn man zulässt, daß auch bei  $C_\lambda$  noch etwas von  $R$ ,  $G$ ,  $B$  beigemischt wird!
- M.a.W.:

$$C_\lambda = \bar{r}R + \bar{g}G + \bar{b}B \quad \text{oder}$$

$$C_\lambda + \bar{r}R = \bar{g}G + \bar{b}B \quad \text{oder}$$

$$C_\lambda + \bar{g}G = \bar{r}R + \bar{b}B \quad \text{oder}$$

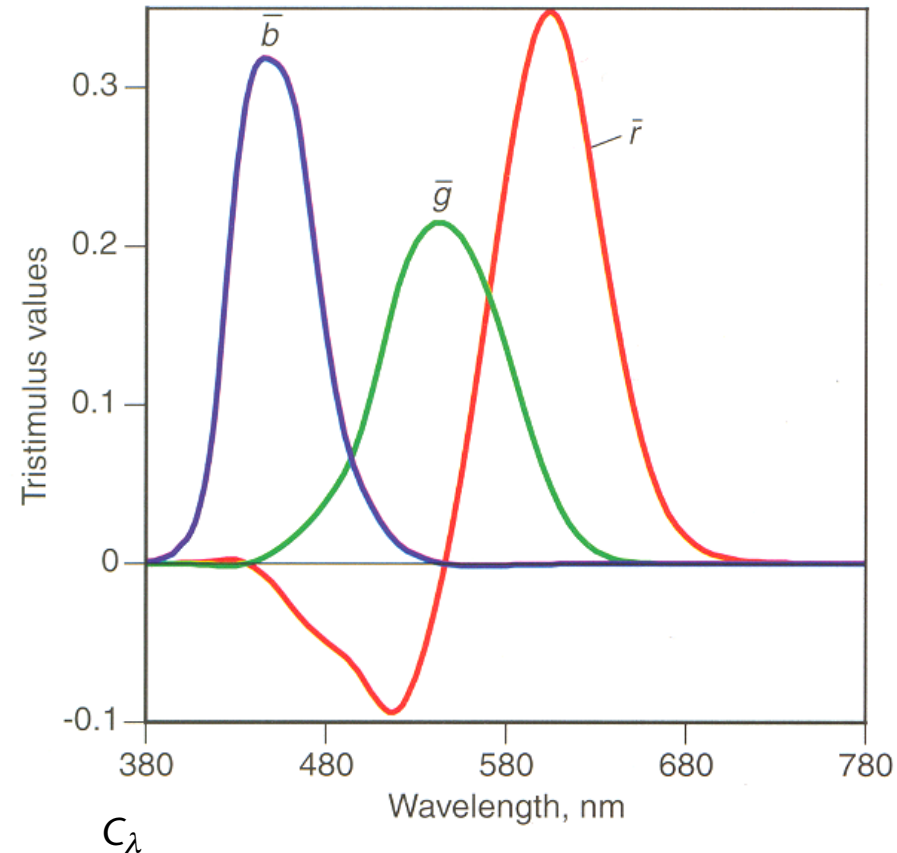
$$C_\lambda + \bar{b}B = \bar{r}R + \bar{g}G$$

- Mathematische Schreibweise:

$$C_\lambda = -\bar{r}R + \bar{g}G + \bar{b}B$$

- Achtung: solche negativen Koeffizienten haben keine physikalische Entsprechung! (man kann Licht nicht voneinander abziehen)

- Die CIE hat sehr viele Tests mit vielen Probanden (engl. *subjects*) gemacht
- Resultat bei monochromatischen Primärlichtquellen  $R_{700}$ ,  $G_{546}$ ,  $B_{436}$  (700, 546, 436 nm): *Beobachterfunktionen* (*matching curves*)  $\bar{r}$ ,  $\bar{g}$ ,  $\bar{b}$



- Leider: egal, welche Primärlichtquellen man wählt, eine der Kurven  $\bar{r}$ ,  $\bar{g}$ ,  $\bar{b}$  wird immer irgendwo negativ

- Beobachtung 2: verdoppelt man die Intensität der Testlichtquelle  $C_\lambda$ , dann muß man auch die Intensität der Primärlichtquellen verdoppeln (indem man die Tristimulus-Werte verdoppelt), d.h.

$$2C_\lambda = (2r)R + (2g)G + (2b)B$$

- Beobachtung 3: 2 Primärfarben alleine genügen *nicht*
- Beobachtung 4: ändert man stetig die Intensität einer der 3 Primärlichtquellen und hält die beiden anderen fest, so ändert sich die Mischfarbe stetig
  - Bemerkung: o.g. Beobachtungen sind eigtl. klar nach unseren Betrachtungen zur Linearkombination von Lichtquellen / Farben

- Der (menschlich wahrnehmbare) Farbraum ist ein **stetiger, 3-dimensionaler Vektorraum** mit der Basis  $R, G, B$ ,  
d.h.

$$\forall C : C = rR + gG + bB$$

- Die Gleichheits-Relation zwischen Farben ist **transitiv**, d.h.

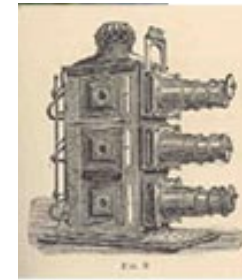
$$C_1 = C_2 \wedge C_2 = C_3 \Rightarrow C_1 = C_3$$

und zwar völlig unabhängig von den *Spektren* der Lichtquellen,  
die die Stimulus-Vektoren  $C_1, C_2, C_3$  hervorgerufen haben



# Exkurs: Prokudin-Gorskii

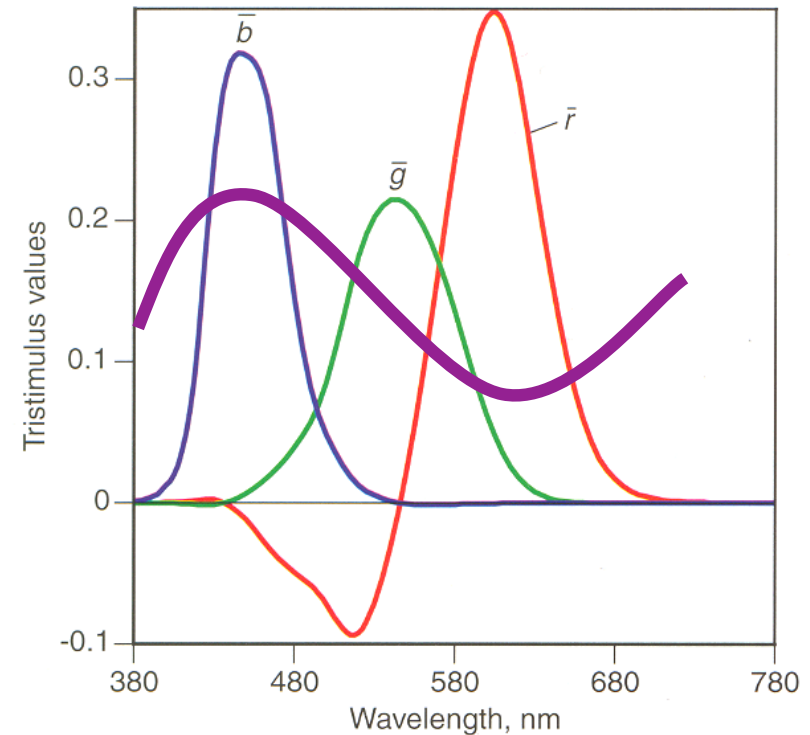
- Russischer Photograph um 1900
- Entwickelte Farb-Photoapparat und Farb-Projektor
  - 3 Einzelbilder rel. schnell hintereinander mit verschiedenen Farbfiltern



<http://www.loc.gov/exhibits/empire/>

# Was macht man mit den CIE-Kurven?

- Sei Spektrum  $X$  gegeben
- Berechne die Tristimulus-Werte  $r$ ,  $g$ ,  $b$  mittels der 3 Kurven (multiplizieren & integrieren)
- Skalieren mit diesen 3 Werten die 3 Primärlichtquellen (700, 546, 436 nm)
- Man erhält ein Metamer zu  $X$  (die gleiche Farbe)
- Achtung: einer der 3 Tristimulus-Werte kann negativ sein!



- Eine Folge der Grassmann'schen Gesetze:
  - Man kann (fast) jedes beliebige Tripel von Primärlichtquellen (= Basis) wählen
  - Hat man eine Farbe bzgl einer Basis gegeben, so kann man diese in jede andere Basis umrechnen (= Basistransformation)
- Beispiel:
  - Orig. Basis  $R, G, B$ , neue Basis  $U, V, W$ , wobei

$$U = u_1 R + u_2 G + u_3 B, \quad V = \dots$$

m.a.W.

$$\begin{pmatrix} U \\ V \\ W \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}}_M \begin{pmatrix} R \\ G \\ B \end{pmatrix}$$



- Nun kann man die Farbe  $C$  vom RGB- in den UVW-Farbraum umrechnen:

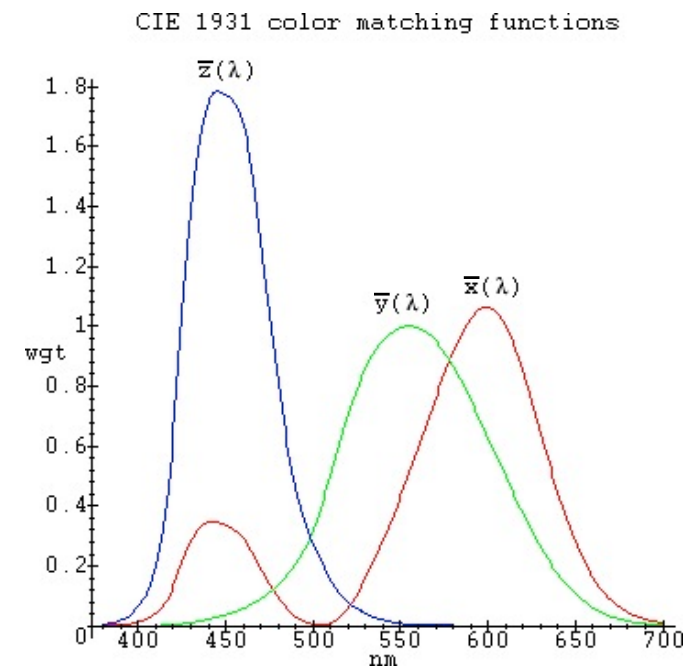
$$C = uU + vV + wW = rR + gG + bB$$

- Also

$$C = (uvw) \begin{pmatrix} U \\ V \\ W \end{pmatrix} = (uvw)M \begin{pmatrix} R \\ G \\ B \end{pmatrix} = (rgb) \begin{pmatrix} R \\ G \\ B \end{pmatrix}$$

$$(uvw) = (rgb)M^{-1}$$

- Negative Tristimulus-Werte sind lästig!
- Ziel: ein Farbraum XYZ, so daß Tristimulus-Werte überall positiv
- Lösung: wähle geeignete , überall positive "Beobachterfunktionen" (*matching curves*), und damit (gedachte, hypothetische!) Primärlichtquellen
- Diese **Standard-Beobachter-Funktionen** sind:



$$\begin{pmatrix} \bar{x}(\lambda) \\ \bar{y}(\lambda) \\ \bar{z}(\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.36 & -0.515 & 0.005 \\ -0.89 & 1.42 & 0.014 \\ -0.46 & 0.088 & 1.009 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{r}(\lambda) \\ \bar{g}(\lambda) \\ \bar{b}(\lambda) \end{pmatrix}$$

- Nachteil: die zu den Beobachterkurven gehörigen, gedachten Primärspektren sind nicht mehr physikalisch realisierbar!
- Die Standard-Beobachterfunktionen wurden von der CIE tabellarisch festgelegt
- Damit kann man die Tristimulus-Werte ausrechnen:

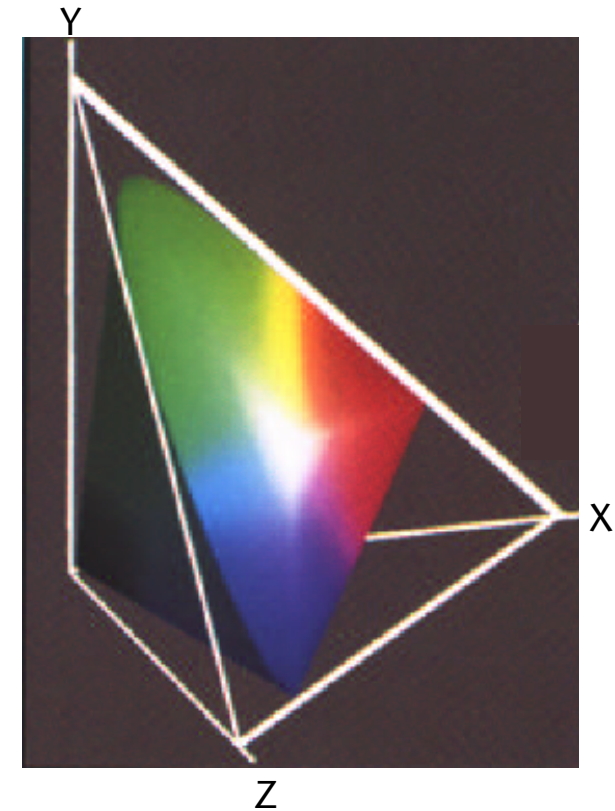
$$X = k \int \bar{x}(\lambda) \cdot P(\lambda)$$

$$Y = k \int \bar{y}(\lambda) \cdot P(\lambda)$$

$$Z = k \int \bar{z}(\lambda) \cdot P(\lambda)$$

mit Normierungsfaktor  $k$  so, dass Weiß einen  $Y$ -Wert = 100 hat

- Der Farbraum:
  - Achsen X, Y, Z
  - Kleiner Nachteil: nicht alle (positiven) Punkte entsprechen tatsächlich Farben!
  
- In der Praxis
  - liegt die XYZ-Spektralwertkurve tabellarisch für Standardbeobachter vor
  - wird  $P(\lambda)$  als Treppenfunktion aus Spektralbändern der Breite  $\Delta\lambda = 5-10$  nm approximiert
  
- Erinnerung: die X-,Y-,Z-Werte sind für alle Wellenlängen positiv
  - (Weil Beobachterkurven [*matching curves*] überall positiv sind, und physikalisches Spektrum sowieso.)



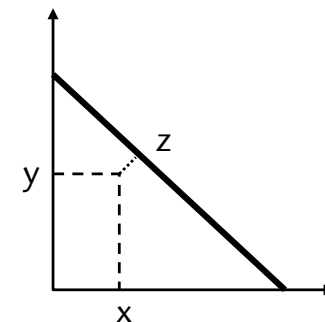
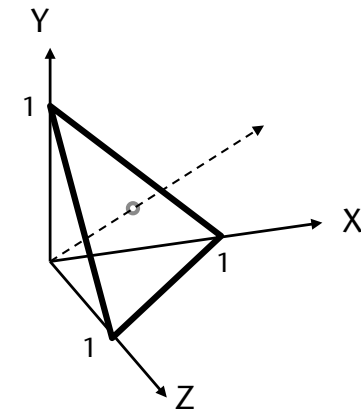
# Das CIE-Chromatizitätsdiagramm

- Der XYZ-Raum ist unhandlich
- Beobachtung aus den Grassmann'schen Experimenten:
  - $(X,Y,Z)$  und  $(\alpha X, \alpha Y, \alpha Z)$ ,  $\alpha > 0$ , haben denselben Farbton (*hue*) und verschiedene Helligkeit (*luminance*)
- Oft interessiert nur der Farbton
- Lösung:

1. Projektion auf die Ebene  $X+Y+Z=1$ :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{X + Y + Z} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

2. Orthogonale Projektion auf XY-Ebene:  
 da  $x+y+z=1$ , reicht die Angabe von  $(x,y)$

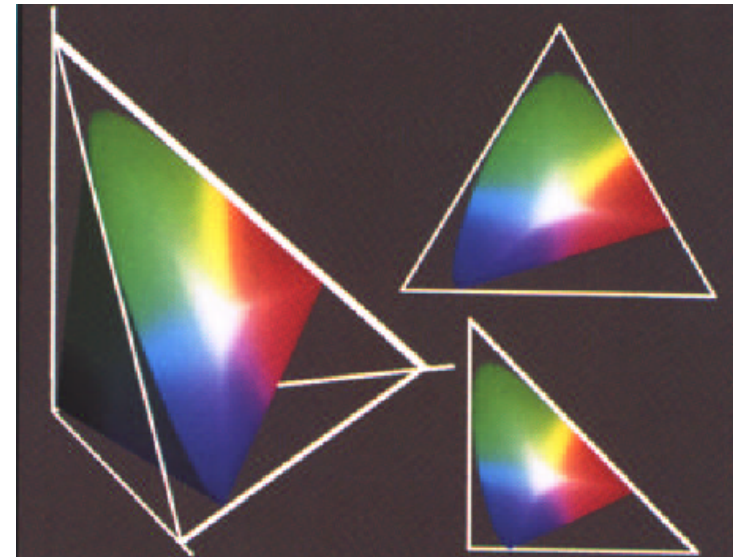
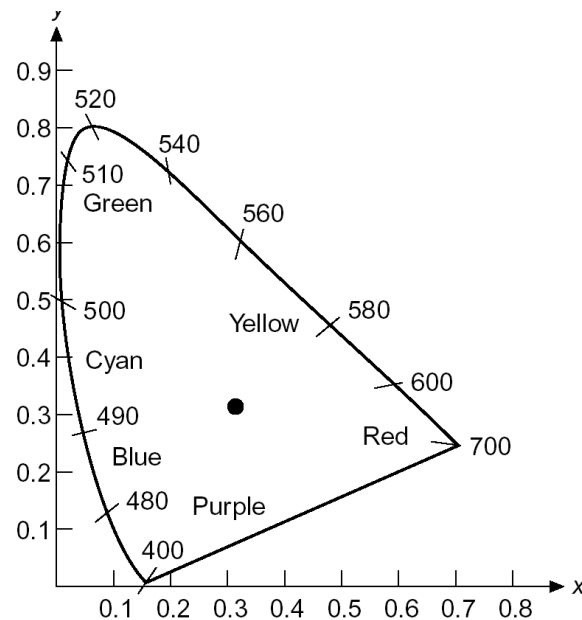
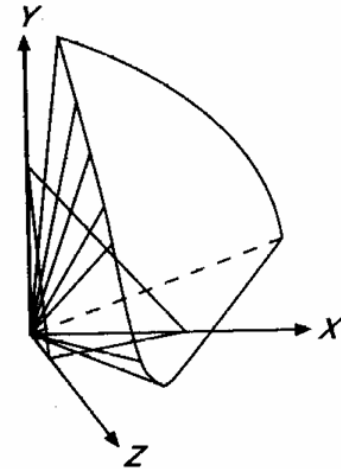


- Zur vollen Spezifikation der Farbe verwendet man oft  $(x, y, Y)$
- Rücktransformation:

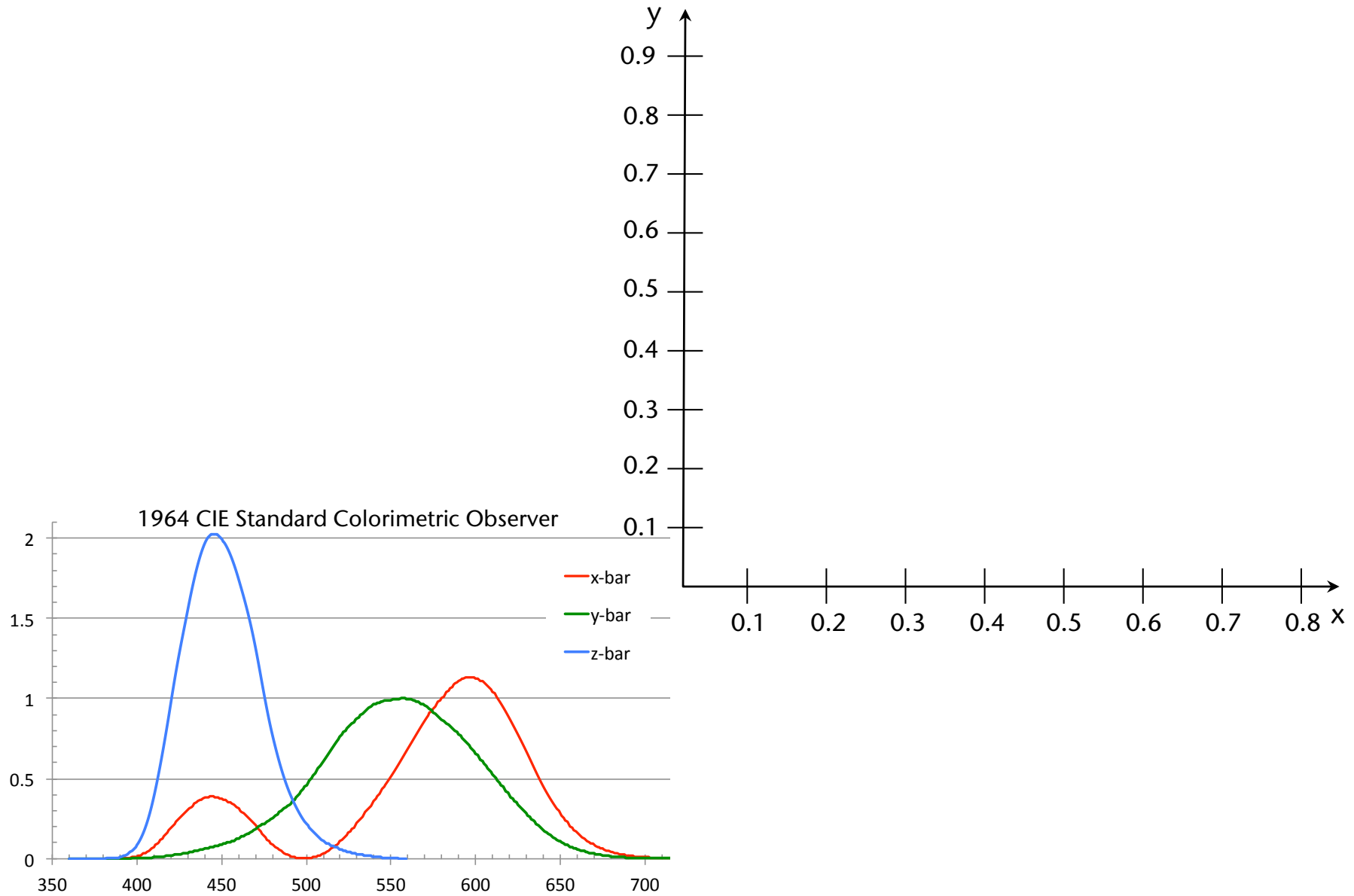
$$X = \frac{x}{y} Y ; \quad z = 1 - x - y ; \quad Z = \frac{z}{y} Y$$

# Eigenschaften

- $(X,Y,Z)$  und  $(\alpha X, \alpha Y, \alpha Z)$ ,  $\alpha > 0$ , haben dieselben Chromatizitätskoordinaten  $(x,y)$
- Geraden in XYZ bleiben Geraden in  $xy$
- Die typ. "Hufeisenform" kommt von der Form der Beobachterkurven (*matching curves*)
- Reine Farben liegen auf dem Rand



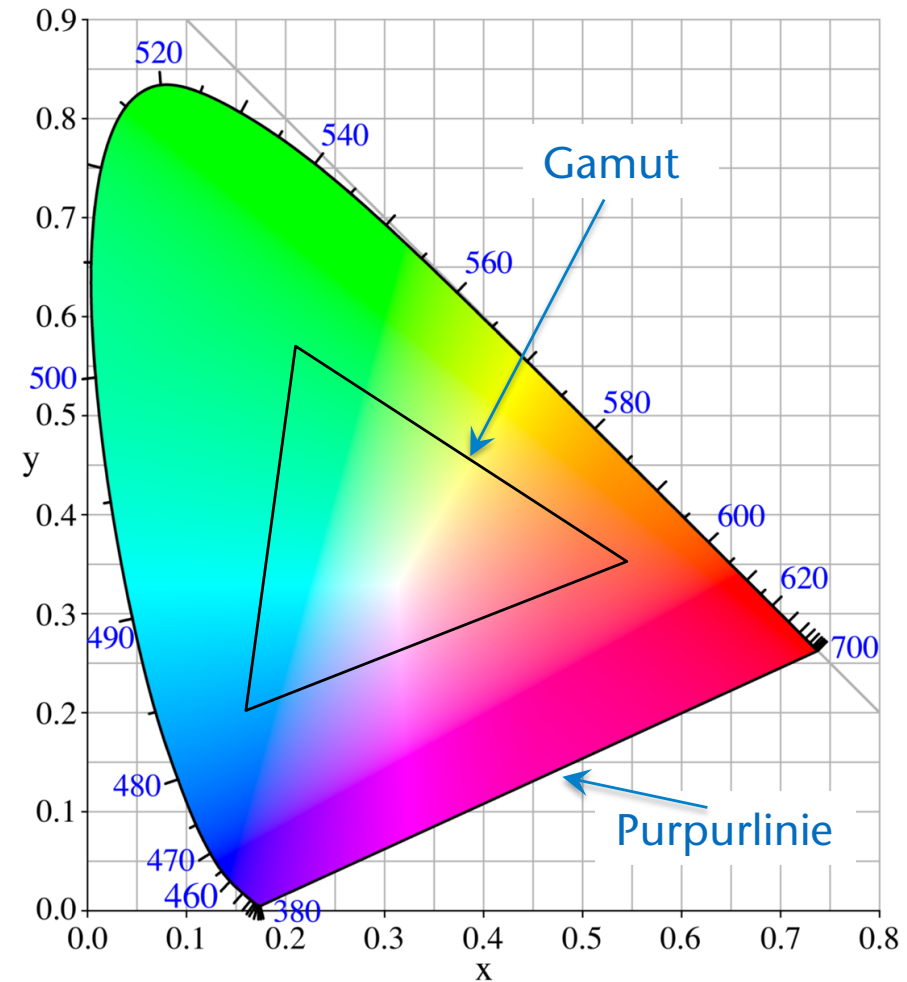
# Plausibilitätsbetrachtung für das "Hufeisen"



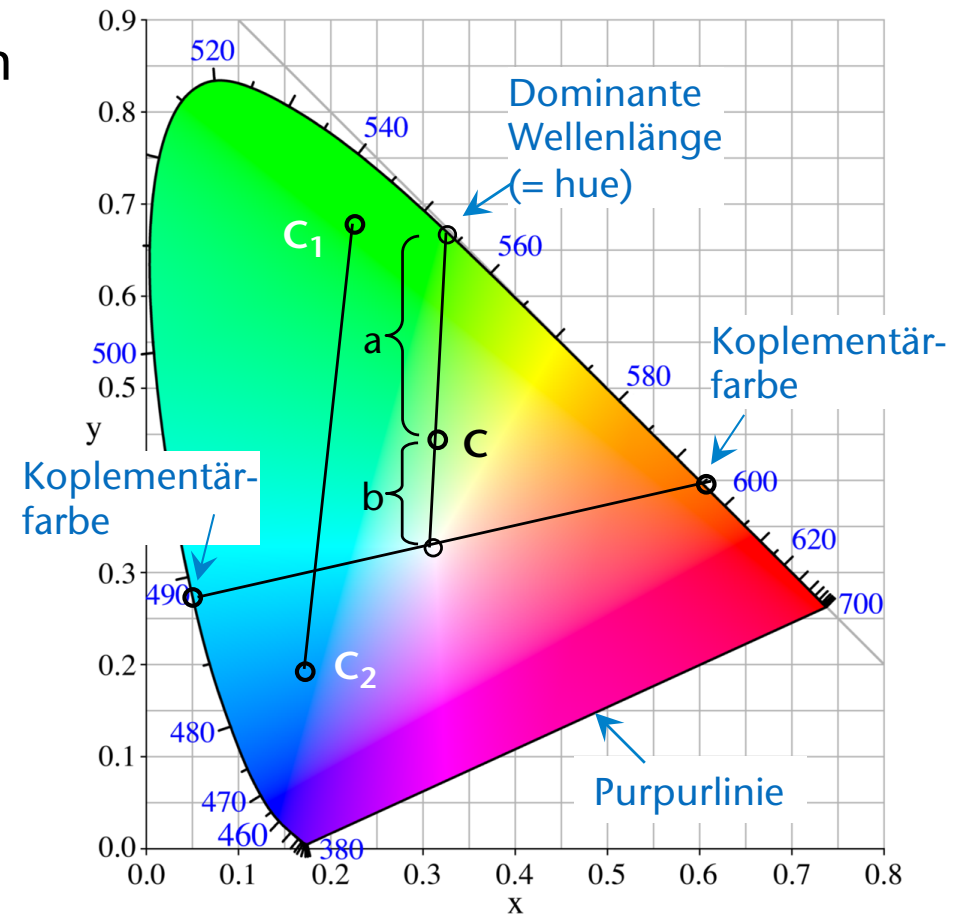


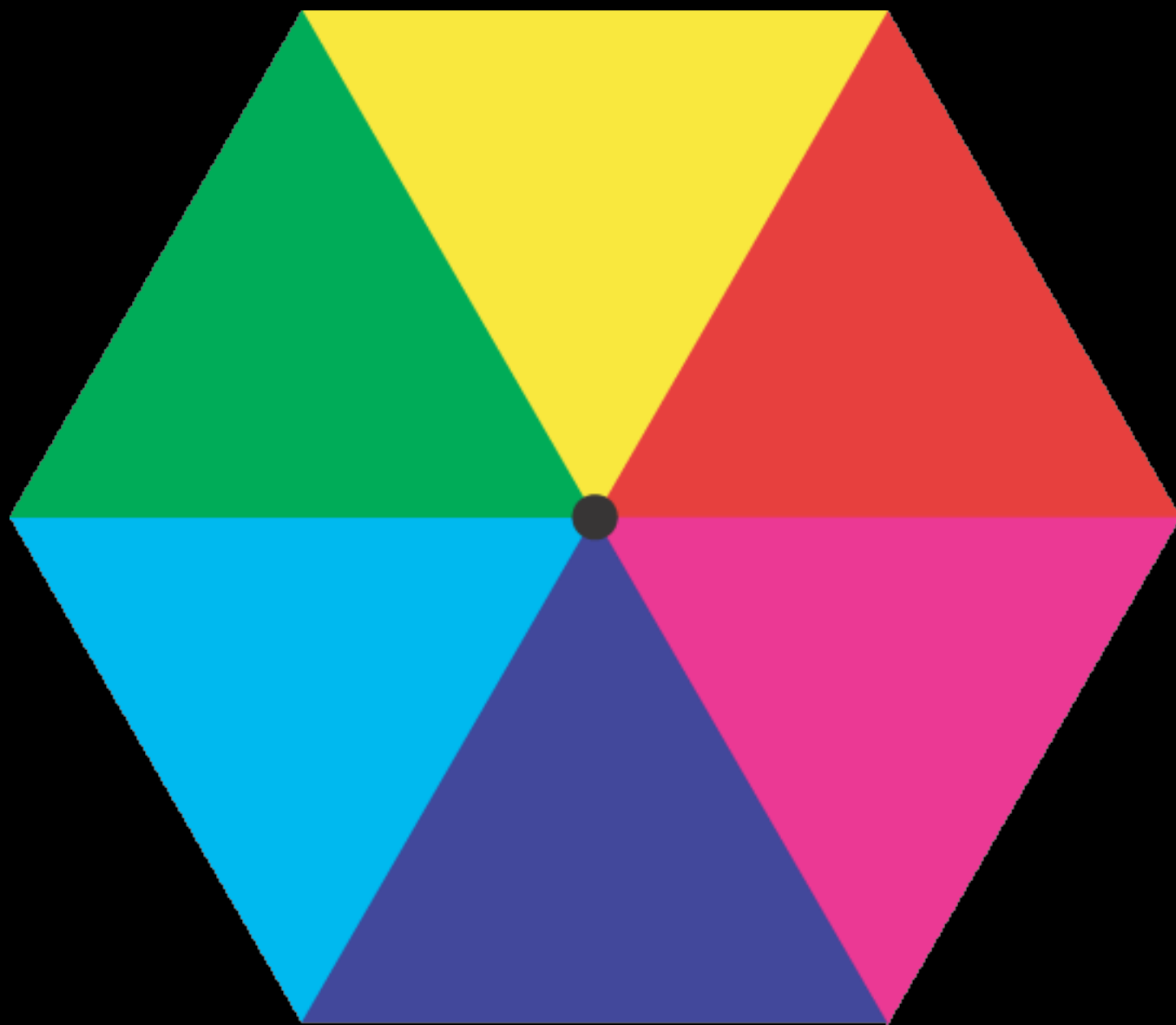
# Interpretation des Chroma-Diagramms

- Standard-Weiß C:
 
$$x = y = z \approx 1/3$$
- Achtung:
  - Kein Monitor/Drucker kann das Chroma-Diagramm korrekt darstellen!
  - Das schwarze Dreieck umreißt ungefähr alle diejenigen Farben, die der Monitor / Projektor darstellen kann!
  - Alle anderen Farben sind höchstwahrscheinlich falsch dargestellt!
  - Alle sichtbaren Farben sind Mischungen von mehreren Wellenlängen → liegen im Inneren



- Mischfarben liegen auf Gerade
- Komplementäre Spektralfarben liegen einander "gegenüber", Weißpunkt dazwischen
- Dominante Wellenlänge: verbinde Weiß mit Farbe, bilde Schnittpunkt mit Rand
- Sättigung (Reinheit) = Verhältnis der Abstände  $a : b$
- Purpurlinie:
  - Diese Farben haben **keine** dominante Wellenlänge!







Bild

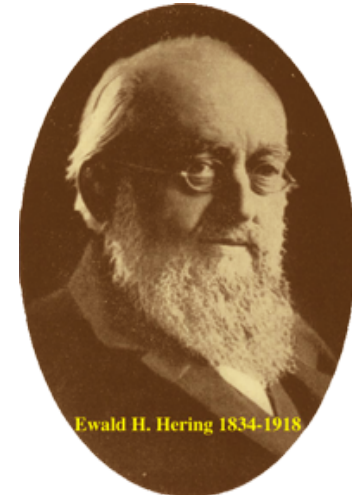
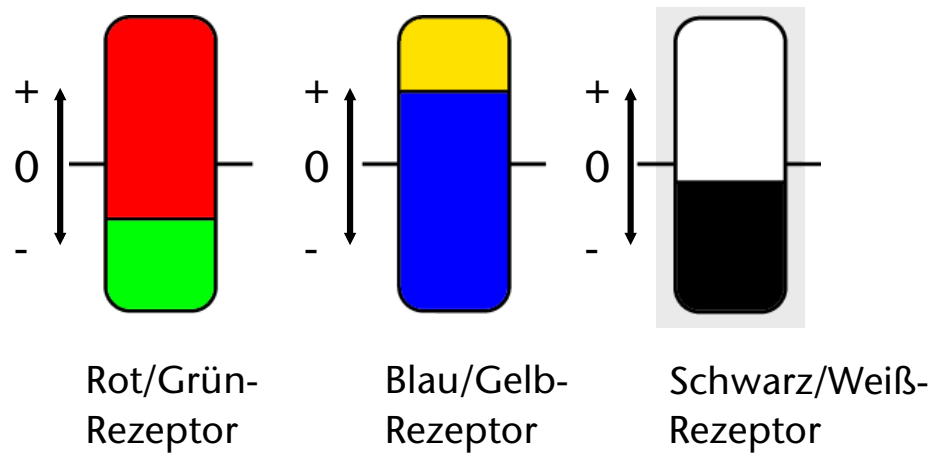


"Nachbild" (*Afterimage*)



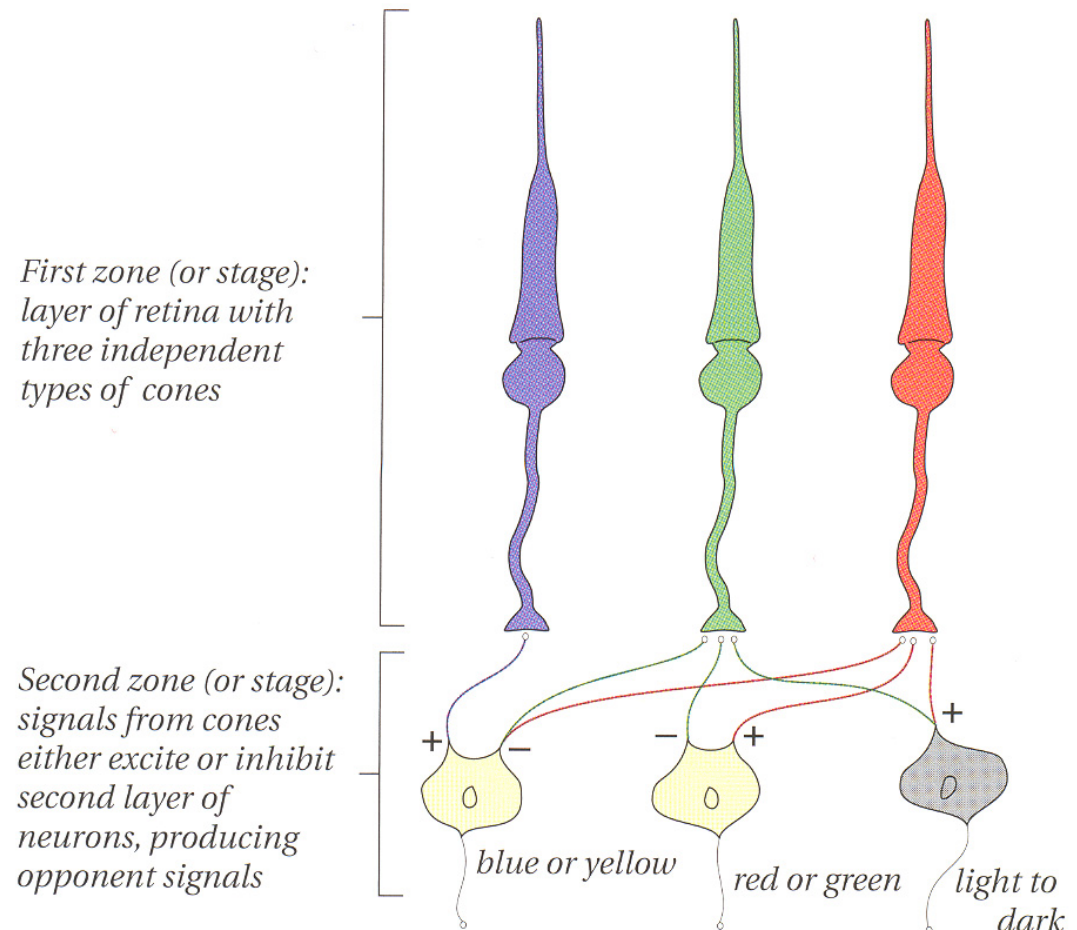
# Das Gegenfarbenmodell

- Helmholtz (u.a.) postulierte die **Tristimulus-Theorie**, d.h., das LMS- (= RGB-) Farbmodell
- Etliche Phänomene konnte man damit nicht erklären
- Hering (1874) postulierte das "**Gegenfarbenmodell**" (*Opponent Colors*)



- Findet tatsächlich seine neuronale Entsprechung in einer "Verschaltung" direkt nach den Rezeptoren:

- Kann man auch einfach durch 3x3-Matrix abbilden (also ein Basiswechsel)

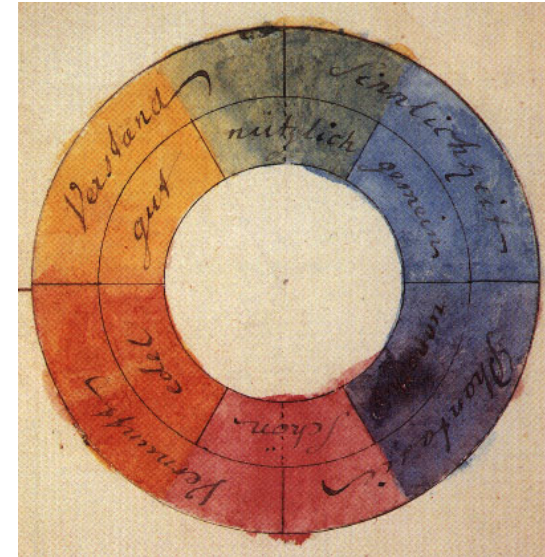




## Historische Randnotiz

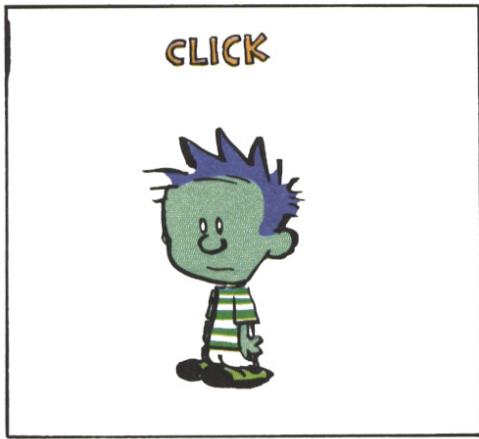
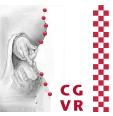


- Gegenfarben und Kontraste schon von Leonardo da Vinci (1500) beschrieben
- Farbkreis mit Gegenfarben von Isaac Newton (1672)
- Erweitert um subjektive/emotionale Wahrnehmung & Kontraste von Johann Wolfgang von Goethe (1810)



[Goethe, *Farbenlehre*, 1810]





# Ein kleines (kognitives) Experiment

- Lesen Sie folgende Farben (möglichst schnell) vor:

Introduction

Background

Theory

Lemma

Proof

- Nun lesen Sie folgende Farben (möglichst schnell) vor:

Schwarz

Rot

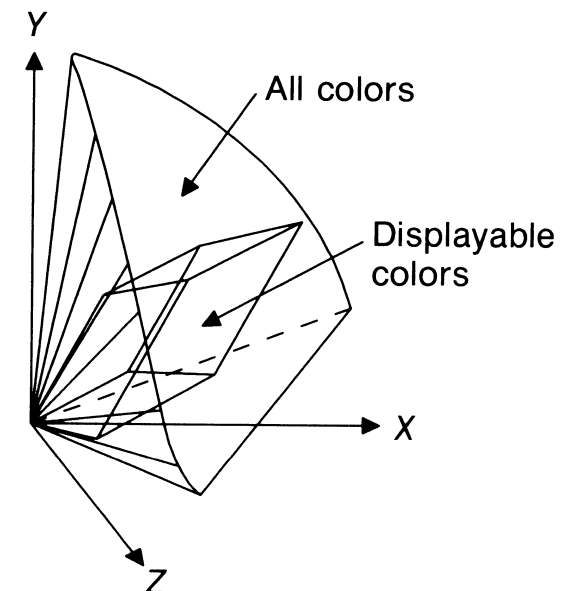
Orange

Gelb

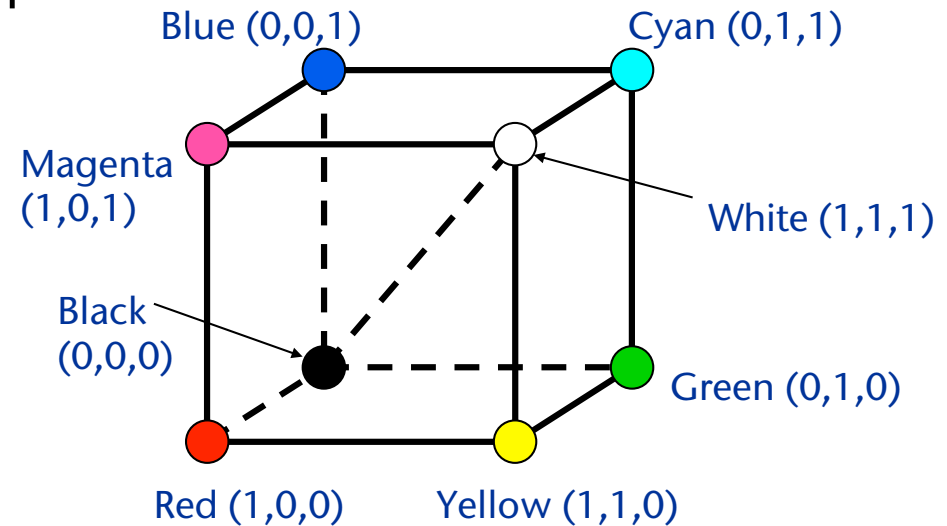
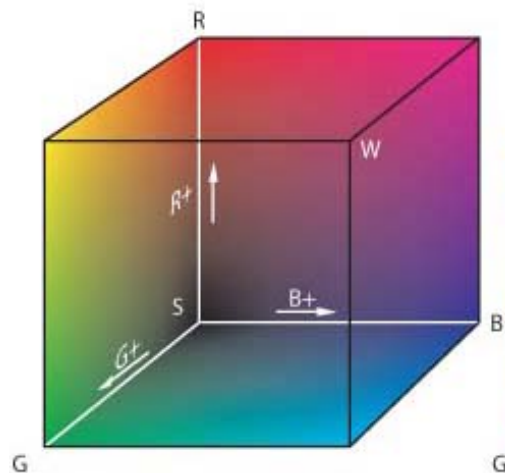
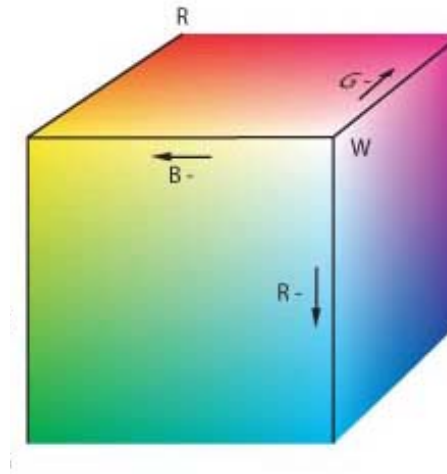
Blau

# Farbmodelle

- XYZ ist zwar die Mutter aller Farb-Standards, aber doch recht unpraktisch
- Je nach Aufgabe / Situation haben sich andere Farbmodelle bewährt
- **Hardwareorientiert:**
  - Geräte produzieren Farben durch Mischen von Grundfarben
  - RGB, CMY, YIQ, Yuv, ...
- **Wahrnehmungsorientiert:**
  - Wahrnehmungsempfinden des Menschen orientiert sich eher an den Parametern Farbton, Helligkeit und Sättigung
  - CIE Lab, HSV, HLS
- Immer eine Teilmenge des CIEXYZ-Raums



- Der "kanonische" Monitor-Farbraum:
  - Jede andere Darstellung muss vor der Darstellung am Monitor ins RGB-Modell umgewandelt werden
- RGB = Einheitswürfel
- Es gibt viele Varianten
  - Ein Standard-RGB-Farbraum ist sRGB
- Graustufen auf der Diagonalen

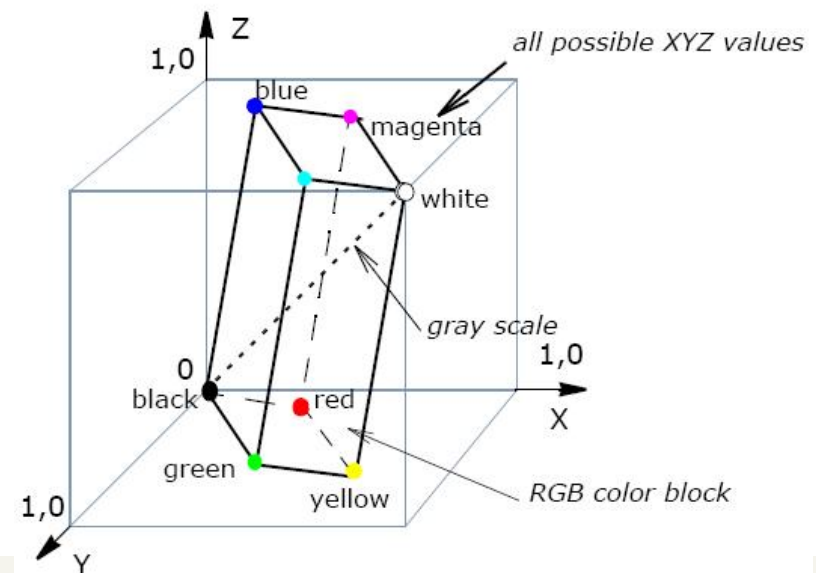




- Monitor-Hersteller geben i.A. Chromatizitäten der Phosphore und des "Weißpunktes" an:  $(x_r, y_r)$  ,  $(x_g, y_g)$ ,  $(x_b, y_b)$ ,  $(x_w, y_w)$ .
- Daraus kann man die lineare Transformation berechnen
- Für sRGB:

$$\begin{pmatrix} R \\ G \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.241 & 1.537 & -0.497 \\ -0.969 & 1.876 & 0.042 \\ 0.056 & -0.204 & 1.057 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

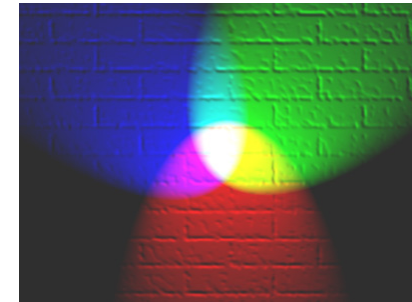
- Erinnerung: es können durchaus Werte außerhalb  $[0,1]$  rauskommen!
  - Führt zum großen Problem des "Gamut-Mapping" bzw. "Tone-Mapping"



# CMY / subtraktive Farbmischung

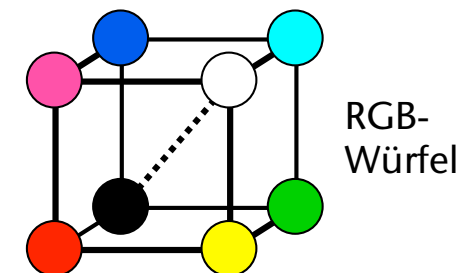
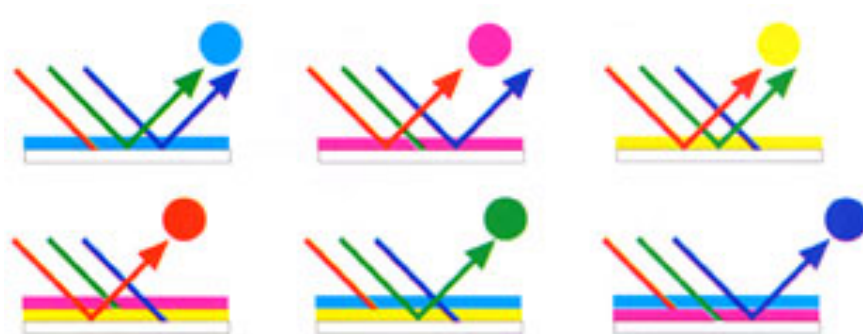
- Bislang immer **additive Farbmodelle** bzw. **additive Farbmischung**

- "Addition" von "Farben" = Addition von Spektren



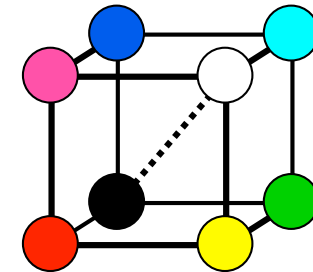
- Beobachtung: bei Überlagerung von Mal-Farben oder Farbfiltern passiert etwas anderes!

- Warum sehen wir "Cyan", wenn wir die Malfarbe "Cyan" auf weißes Papier auftragen?



- Daraus ergibt sich folgende Tabelle:

Tinte	Absorbiert	Reflektiert	Erscheint
Cyan	Rot	Grün + Blau	Cyan
Magenta	Green	Rot + Blau	Magenta
Gelb	Blau	Rot + Grün	Gelb
Magenta + Gelb	Grün + Blau	Rot	Rot
Cyan + Gelb	Rot + Blau	Grün	Grün
Cyan + Magenta	Rot + Grün	Blau	Blau



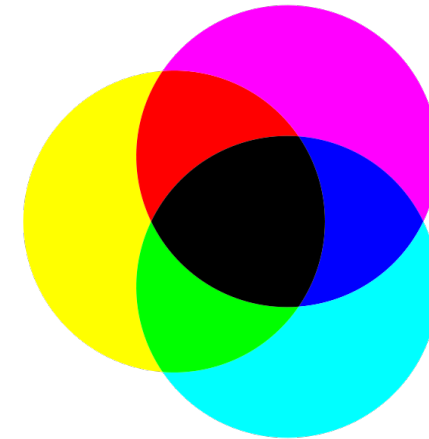
- Folgerungen:

- Basis besteht aus Cyan, Magenta, Gelb → CMY
- "Addition" von Farben = Subtraktion von Spektren

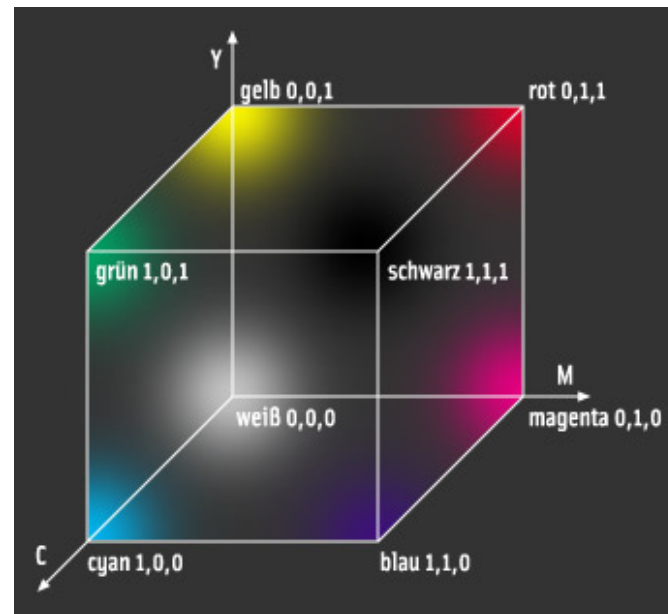


■ Umrechnung:

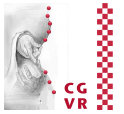
$$\begin{pmatrix} C \\ M \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} R \\ G \\ B \end{pmatrix}$$



- "Null"-Punkt = (0,0,0) = Weiß
- (1,1,1) = Schwarz



# Erweiterung: CMYK



- Erweiterung des CMY-Modells
- K = Black
- Löst verschiedene Probleme:
  - C + M + Y ergibt kein perfektes Schwarz (eher schmutziges Braun)
  - Alle drei Farben übereinander drucken macht Papier sehr naß
  - Text ist i.A. schwarz →
    - würde Farben verschwenden
    - exakte Überlagerung schwierig (man denke an die Serifen)

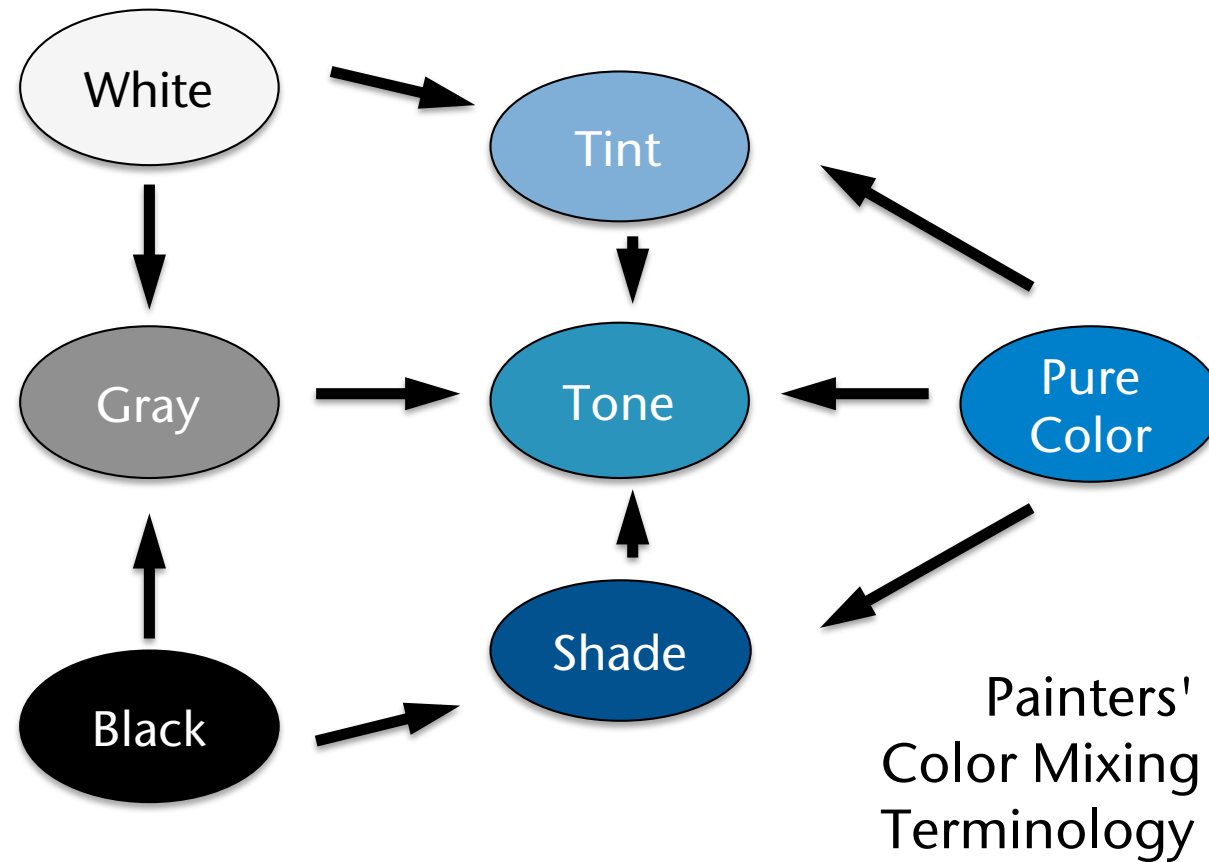






Rogier  
van der  
Weyden:  
Deposition,  
ca. 1435

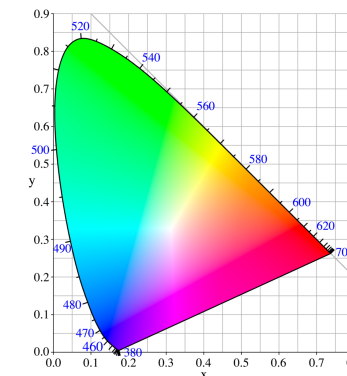
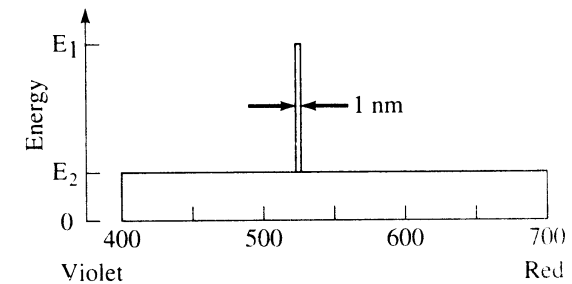
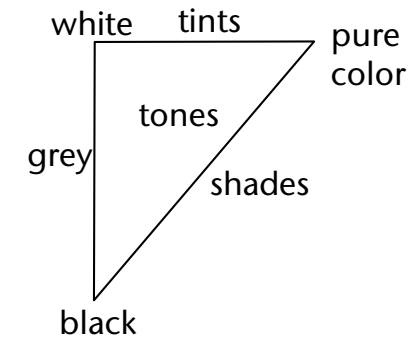
- Maler haben eine ganz andere Sichtweise und Methode zur Erzeugung von (gemischten) Farben:



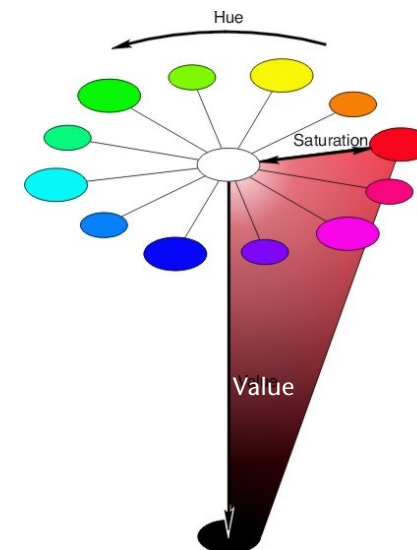
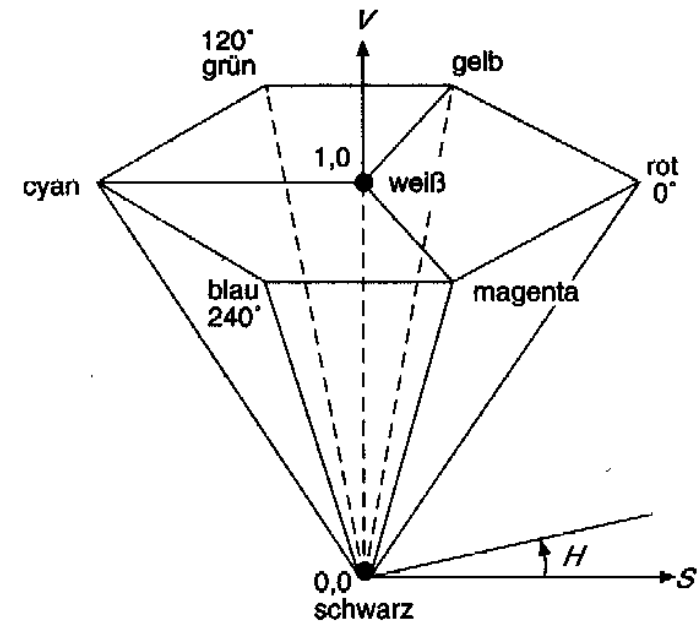




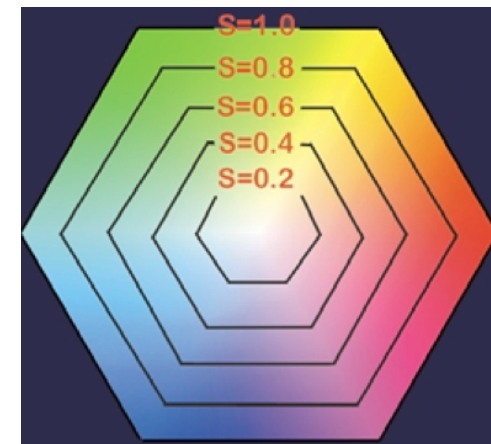
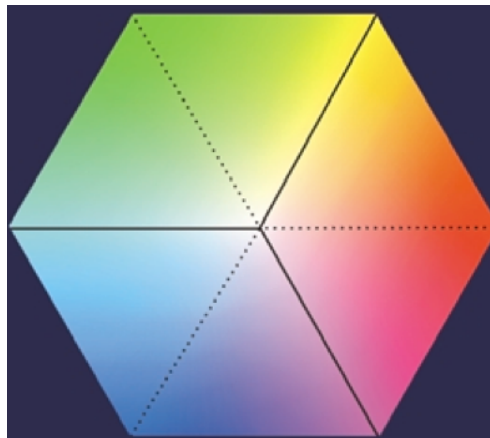
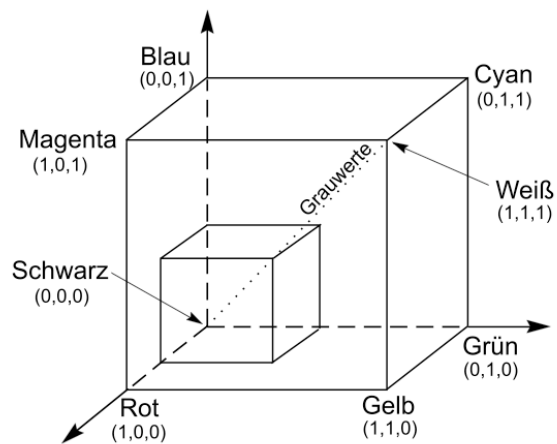
- Problem: RGB & CMY sind sehr unintuitiv
- Menschliche Farbspezifikation arbeitet eher mit
  - "Farbton" (rot, gelb, grün-blau, ...)
  - "Reinheit" ("satte Farbe", "pastell-...")
  - "Helligkeit" (dunkel)
- Entspricht auch eher den Parametern zur Beschreibung von chromatischem Licht
- ... und eher dem CIEXYZ-Farbraum



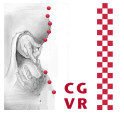
- Lösung: HSV-Farbmodell
  - $H = Hue = \text{Farbton in Grad} = \text{dominante Wellenlänge}$
  - $S = Saturation = \text{"Entfernung" von der (unbunten) Achse des Kegels} = \text{Verhältnis Energie von Weiß : Energie von dominanter Wellenlänge}$
  - $V = Value = \text{Höhe über dem "Boden"} = \text{Luminanz}$
- Anordnung der Farben:
  - Wie im Farbrad
  - Komplementärfarben gegenüber



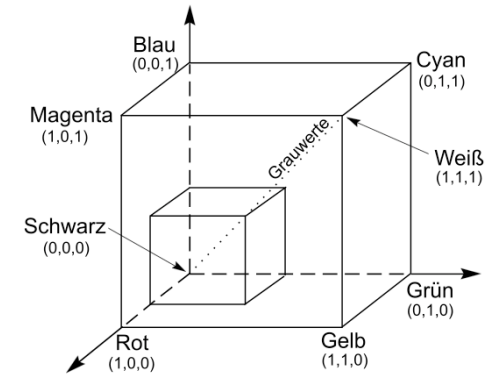
- Geometrische "Interpretation" des HSV-Kegels:
  - Stelle RGB-Würfel auf die schwarze Spitze, so daß die Grau-Achse senkrecht steht
  - Projiziere die "obere Hülle" des Würfels auf die Ebene
- Jede horizontale Schnittfläche durch den HSV-Kegel entspricht den 3 "oberen" Seiten eines Teilwürfels des RGB-Würfels



# Umrechnung RGB → HSV



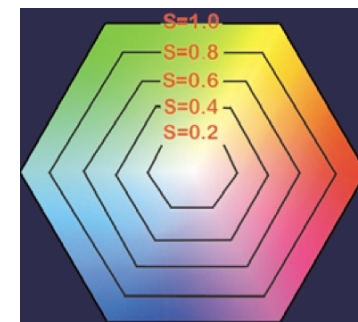
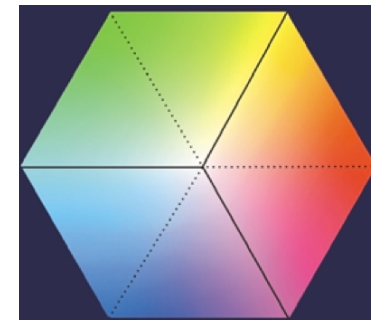
- Keine lineare Transformation mehr (logischerweise)
  - Die "oberen" 3 Seiten des Würfels sind definiert durch  $\max(R,G,B) = 1$
  - Falls  $\min(R,G,B) = 0 \rightarrow$  Farbe liegt auf einer der "unteren" Seiten des RGB-Würfels



■ Algo:

1.  $V = \max(R, G, B)$

2. 
$$S = \begin{cases} \frac{V - \min(R,G,B)}{V} & , V > 0 \\ 0 & , V = 0 \end{cases}$$





3. Falls  $S > 0$ :

$$H = \begin{cases} 0 + \frac{G-B}{\max - \min} & , R = \max(R, G, B) \\ 2 + \frac{B-R}{\max - \min} & , G = \max(R, G, B) \\ 4 + \frac{R-G}{\max - \min} & , B = \max(R, G, B) \end{cases}$$

(falls  $S=0$  ist  $H$ =beliebig)

4.  $H = H \cdot 60^\circ$

5. Falls  $H < 0 \rightarrow H += 360$

- HSV  $\rightarrow$  RGB: ähnlich

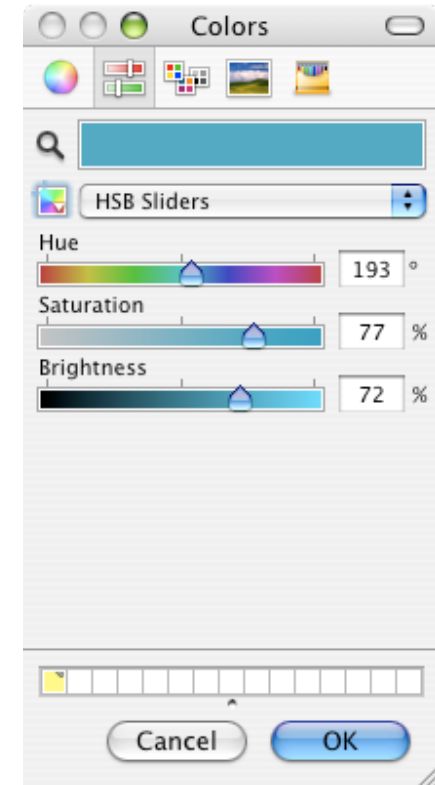
- Color Picker: heute Standard in jedem GUI zur Farbauswahl
- "Enhance colors" in Photo-Bearbeitungs-Software



vorher



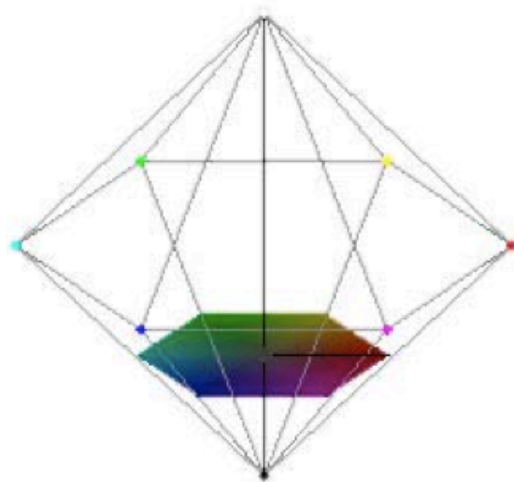
nachher



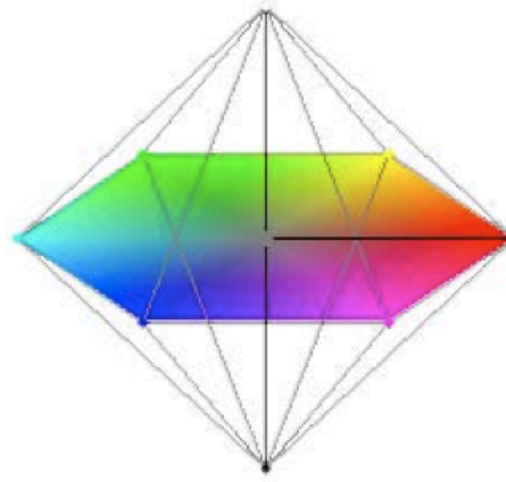
- Falschfarben ("color shift"):



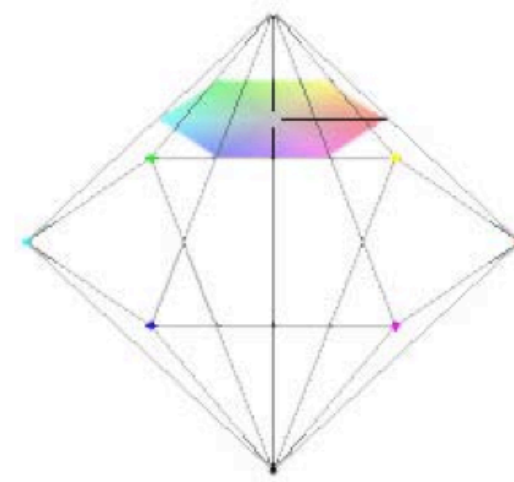
- HLS = *Hue, Lightness, Saturation*
- Manchmal auch HSL oder HIS
- Etwas "symmetrischer" aufgebaut:
  - Weiß als auch Schwarz bilden eine Spitze
  - Größte "Breite" bei 50% Grau



L= 0.25



L= 0.5



L= 0.75

- Häufiges Problem:
  - Farben  $C_1$  und  $C_2$  gegeben
  - Gesucht: alle Farben "dazwischen"

- Lineare Interpolation

$$C(t) = t \cdot C_1 + (1-t) \cdot C_2$$

liefert "irgendwelche" Farben  
(auf der Geraden zwischen  $C_1$  und  $C_2$ )

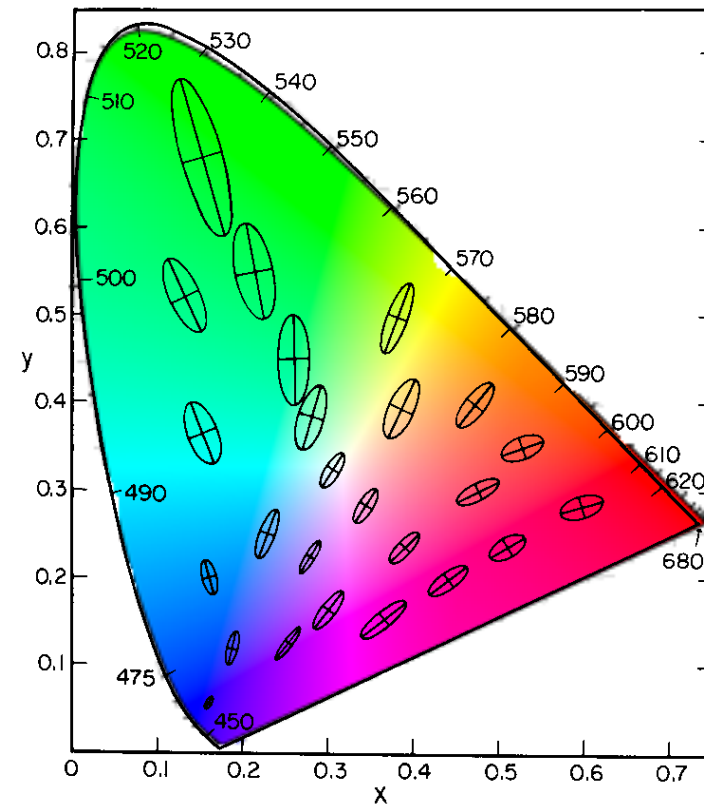
- Je nach Anwendung:
  - Richtigen Farbraum wählen
  - Egal

- Häufiges Problem:
  - Maß für den "Abstand" zwischen zwei Farben benötigt
  - Bereich des Farbraums mit "äquidistanten" Farben sampeln

- Was ist der "Abstand"?

- MacAdams-Ellipsen:

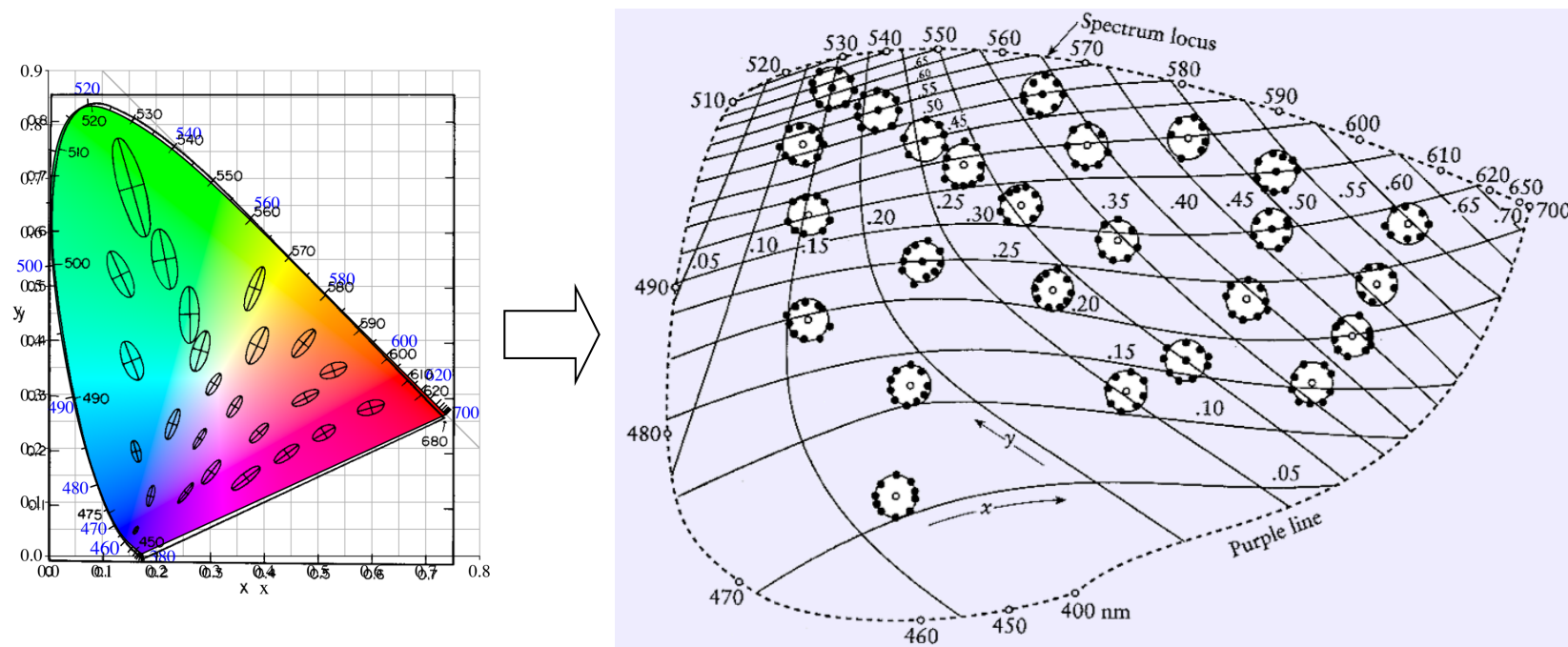
- zeigen die "just noticeable difference" im CIE xy-Diagramm
- alle Farben auf dem Rand einer Ellipse haben den gleichen, gerade noch wahrnehmbaren Abstand vom Zentrum



- Hat man so ähnlich in jedem "linearen" Farbraum

# Uniforme Farbräume

- **Uniformer Farbraum** = Farbraum, in dem der Ort aller Farben mit gleicher wahrgenommener Distanz zu einer beliebigen gegebenen Farbe einen Kreis ergibt (d.h., die MacAdams-Ellipsen werden zu Kreisen)
- Lässt sich nur durch **nicht-lineare Transformation** erreichen





# Beispiel: der CIE Lab (aka L\*a\*b\*)

- Verwendete Achsen:
  - L = Luminanz
  - a,b = Gegenfarbenachsen

- Transformation:

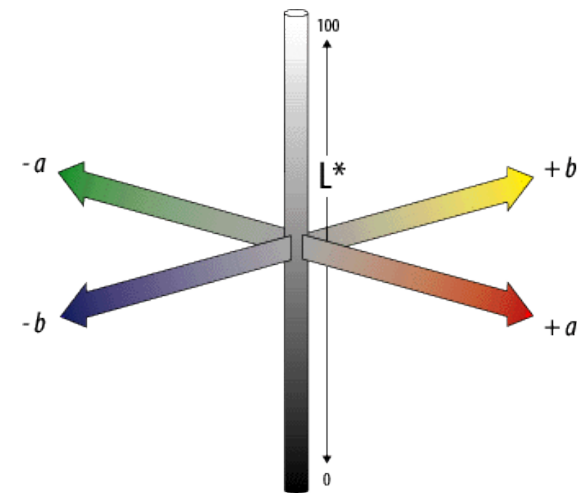
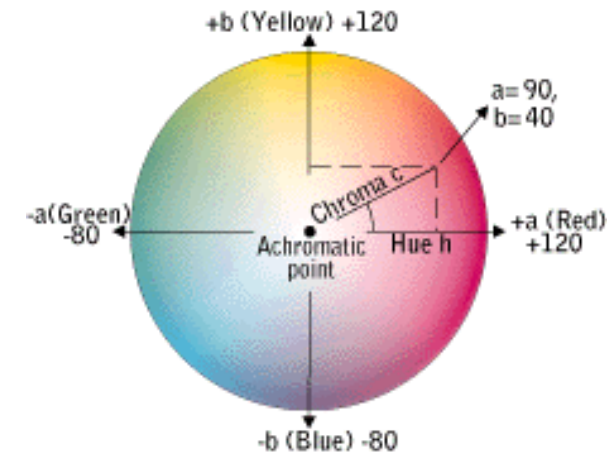
$$L = 116 \left( \frac{Y}{Y_w} \right)^{\frac{1}{3}}$$

$$a = 500 \left[ \left( \frac{X}{X_w} \right)^{\frac{1}{3}} - \left( \frac{Y}{Y_w} \right)^{\frac{1}{3}} \right]$$

$$b = 200 \left[ \left( \frac{Y}{Y_w} \right)^{\frac{1}{3}} - \left( \frac{Z}{Z_w} \right)^{\frac{1}{3}} \right]$$

wobei  $(X_w, Y_w, Z_w)$  der Weißpunkt ist

- Achtung: a,b können negativ werden



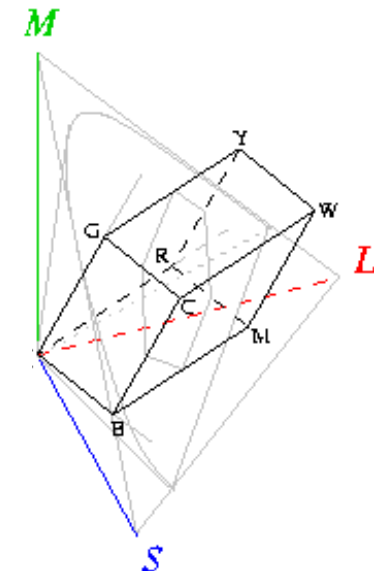
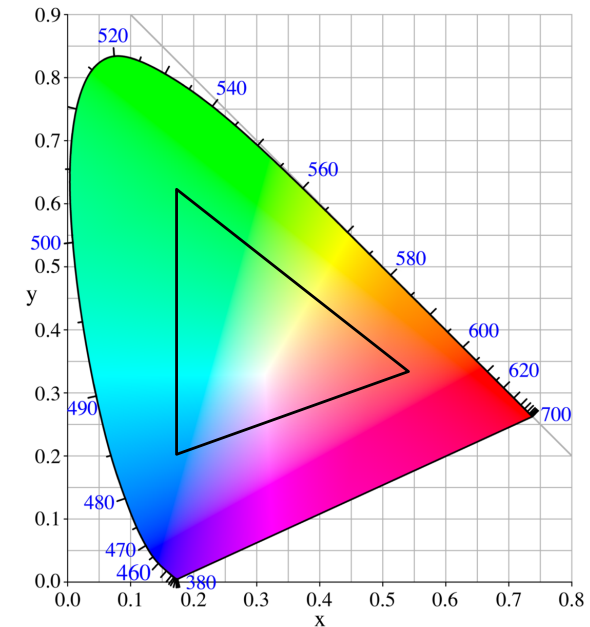


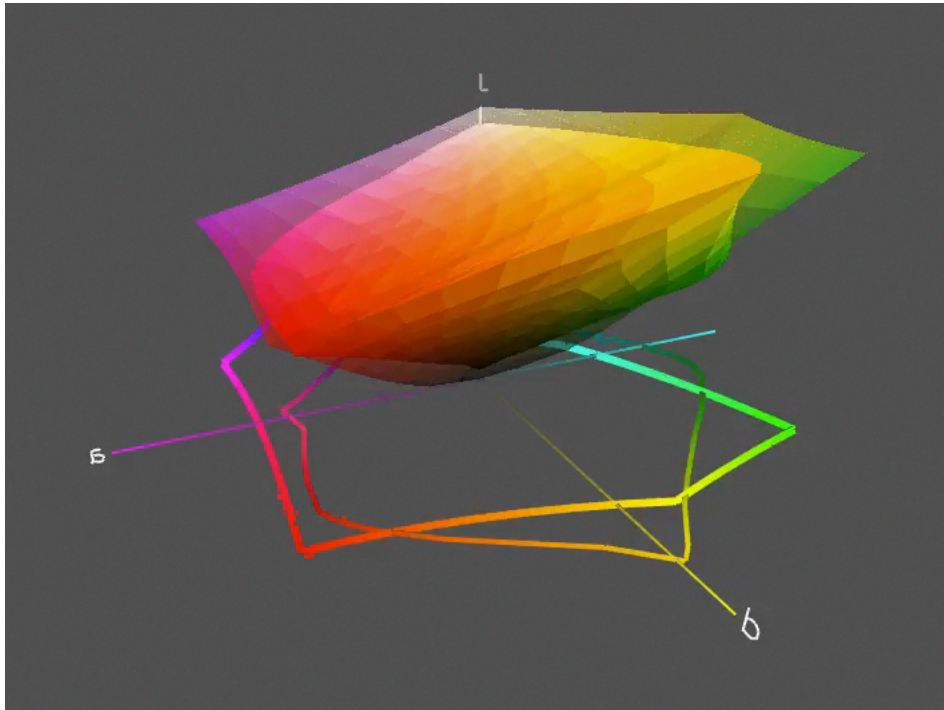


# Der Gamut

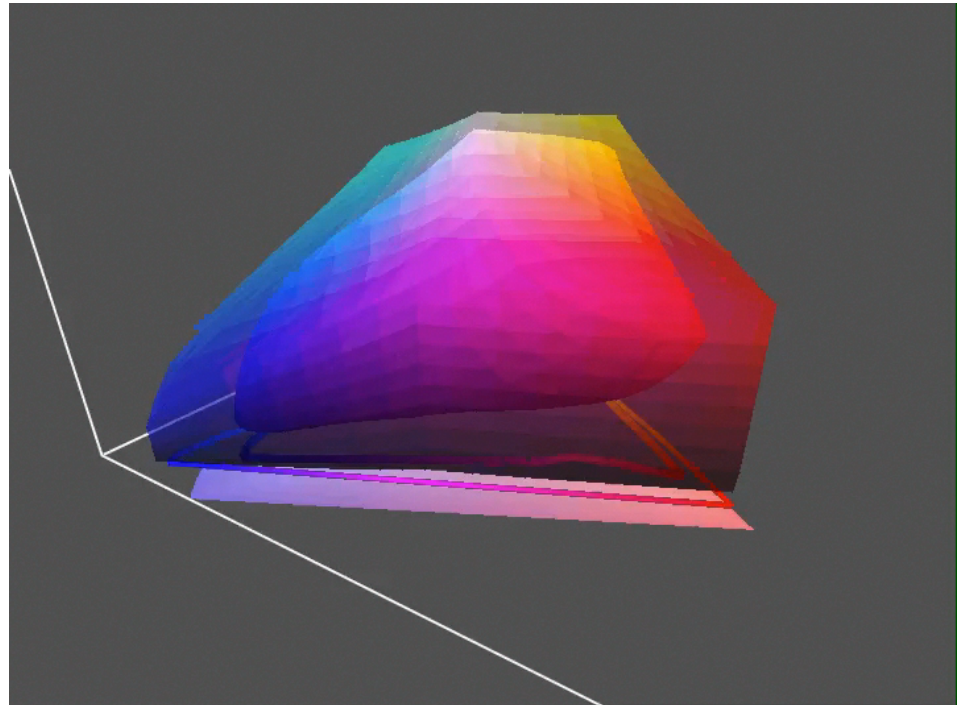


- **Gamut** = Bereich all derjenigen Farben, der von einem Gerät (Monitor, Drucker, ...) dargestellt werden kann
- **Lemma:**  
Jedes Gerät mit 3 Primärfarben kann nur Farben innerhalb des durch diese 3 Farben definierten Dreiecks produzieren!
- **Corollar:**  
Kein Gerät mit 3 Primärfarben kann alle Farben produzieren!
- **Achtung:** eigtl muß der Gamut 3-dimensional dargestellt werden!



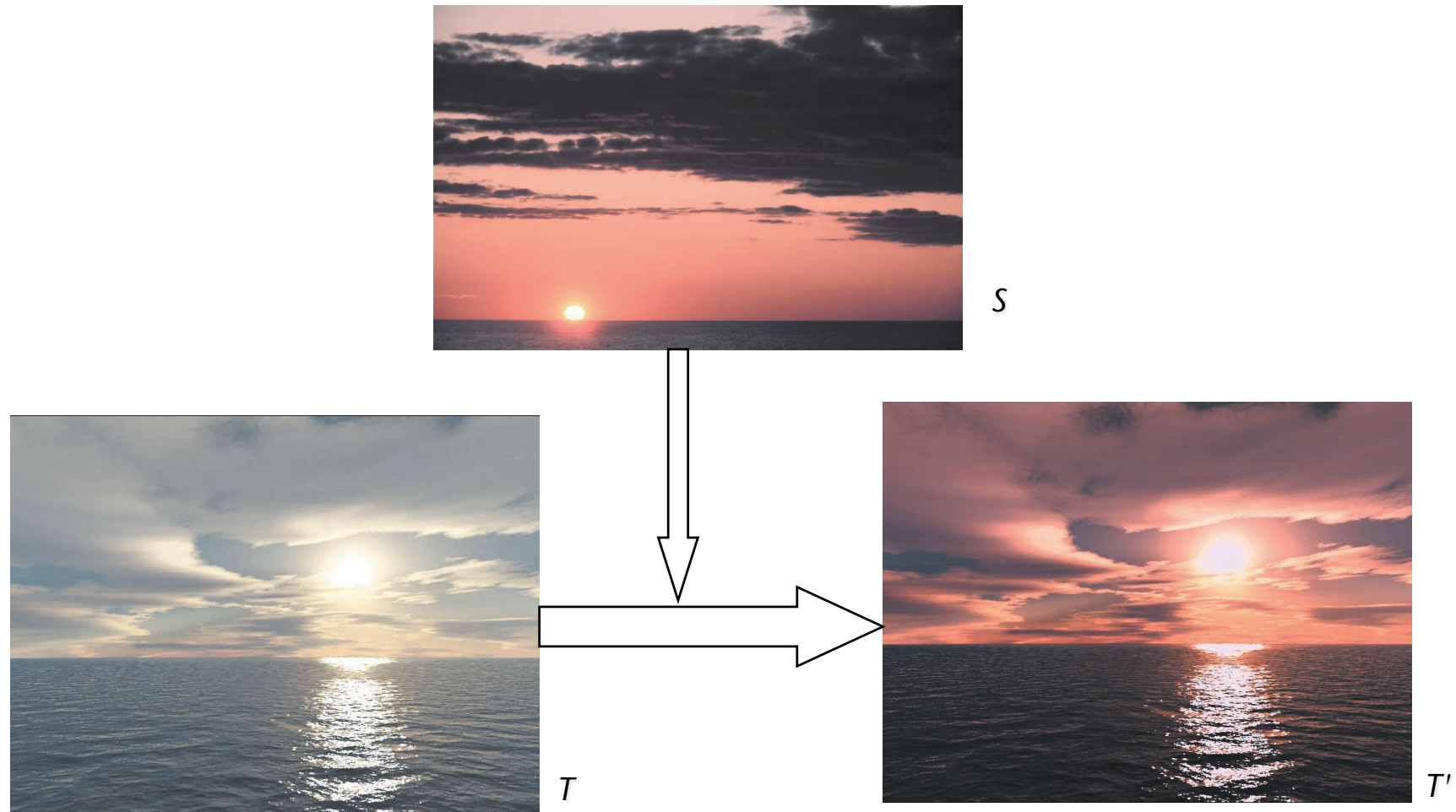


Monitor- vs. Drucker-Gamuts im Lab-Raum



Monitor- vs. Drucker-Gamuts im Yxy-Raum

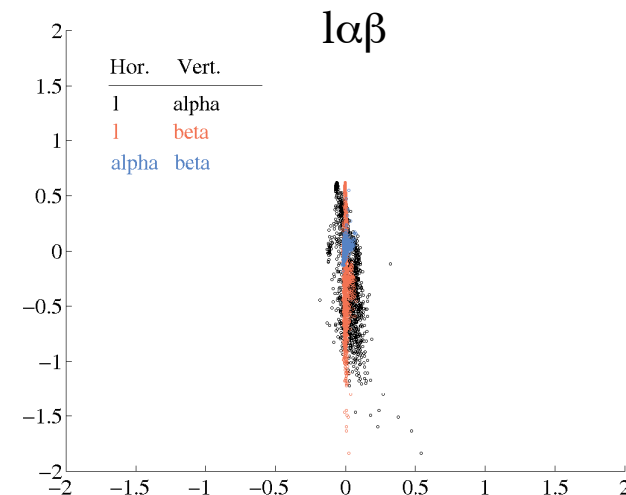
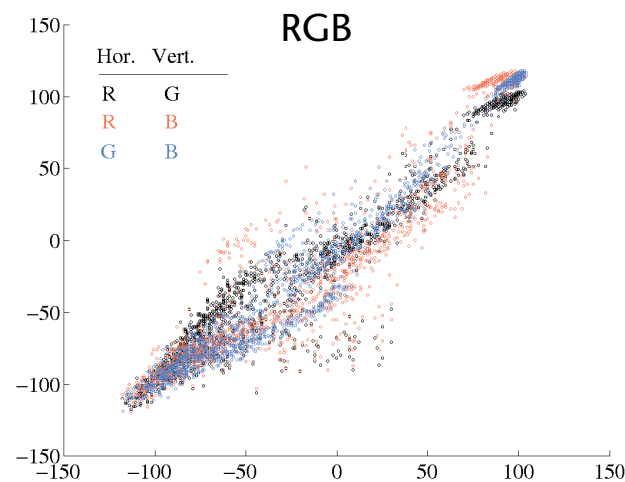
- Aufgabe: Farben eines Quellbildes  $S$  (Source) auf ein Zielbild  $T$  (Target) übertragen



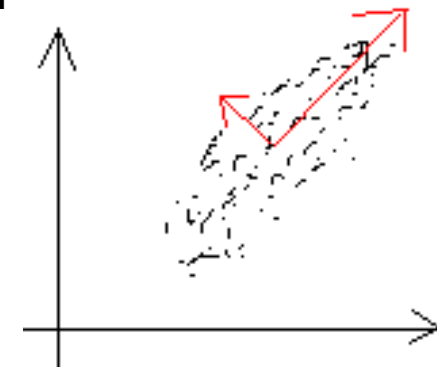
- R-, G- und B-Werte sind normalerweise stark korreliert
  - Beispiel: Histogramm eines natürlichen Bildes im RGB-Raum
- Für Color-Transfer nötig: Farbraum mit minimaler Korrelation der Kanäle
- Ruderman et. al. stellten  $l\alpha\beta$ -Farbraum vor, welcher diese Eigenschaft erfüllt



2000 zufällig  
ausgewählte  
Punkte



- Entstanden bei Untersuchung der menschlichen Farbwahrnehmung
- Konvertierung der RGB-Bilder in den LMS-Farbraum (Zapfen im menschl. Auge)
- Logarithmierung der Farbkanäle
  - Weber-Fechner Gesetz: Stärke von Sinneseindrücken verläuft logarithmisch zur Intensität des physikalischen Reizes
- Koordinatentransformation, so dass Korrelation minimal:
  - Nähere Histogramm der Bilder durch Ellipsoid an
  - Hauptachsentransformation



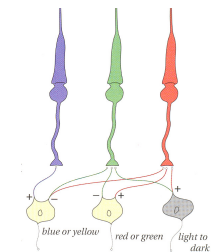
- Konvertierung vom RGB- in den  $\alpha\beta$ -Raum:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5141 & 0.3239 & 0.1604 \\ 0.2651 & 0.6702 & 0.0641 \\ 0.0241 & 0.1228 & 0.8444 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R \\ G \\ B \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} L \\ M \\ S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3897 & 0.6890 & -0.0787 \\ -0.2298 & 1.1834 & 0.0464 \\ 0.0000 & 0.0000 & 1.0000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathcal{L} \\ \mathcal{M} \\ \mathcal{S} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \log L - \langle \log L \rangle \\ \log M - \langle \log M \rangle \\ \log S - \langle \log S \rangle \end{bmatrix} \quad \langle x \rangle = \text{Mittelwert}$$

$$\begin{bmatrix} I \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{L} \\ \mathcal{M} \\ \mathcal{S} \end{bmatrix}$$

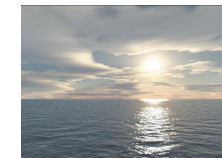




- Quellbild  $S$  und Zielbild  $T$  in den  $l\alpha\beta$ -Farbraum konvertieren
- Berechne Mittelwert  $\langle (l^S, \alpha^S, \beta^S) \rangle, \langle (l^T, \alpha^T, \beta^T) \rangle$  und Standardabweichung  $(\sigma_l^S, \sigma_\alpha^S, \sigma_\beta^S)$   $(\sigma_l^T, \sigma_\alpha^T, \sigma_\beta^T)$  der Farben der Bilder
- Für alle Pixel des Zielbildes  $T$ :

1. Mittelwert des Quellbildes subtrahieren

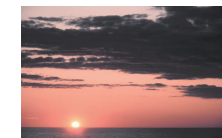
$$(l_i^1, \alpha_i^1, \beta_i^1) = (l_i^T, \alpha_i^T, \beta_i^T) - \langle (l^T, \alpha^T, \beta^T) \rangle$$



$T$

2. Skalierung mit dem Quotienten der Standardabweichungen

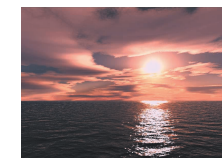
$$(l_i^2, \alpha_i^2, \beta_i^2) = \left( \frac{\sigma_l^S}{\sigma_l^T} \cdot l_i^1, \frac{\sigma_\alpha^S}{\sigma_\alpha^T} \cdot \alpha_i^1, \frac{\sigma_\beta^S}{\sigma_\beta^T} \cdot \beta_i^1 \right)$$



$S$

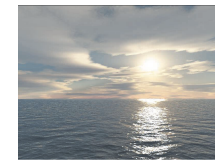
3. Erwartungswert des Zielbildes aufaddieren

$$(l_i^3, \alpha_i^3, \beta_i^3) = (l_i^2, \alpha_i^2, \beta_i^2) + \langle (l^S, \alpha^S, \beta^S) \rangle$$

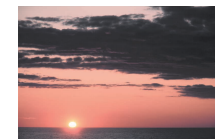


$T'$

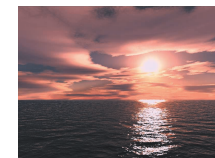
- Ergebnis: Zielbild  $T$  hat dieselben statistischen Momente wie das Source-Bild (aber natürlich andere konkrete Farbewerte in den Pixeln!)



$T$



$S$

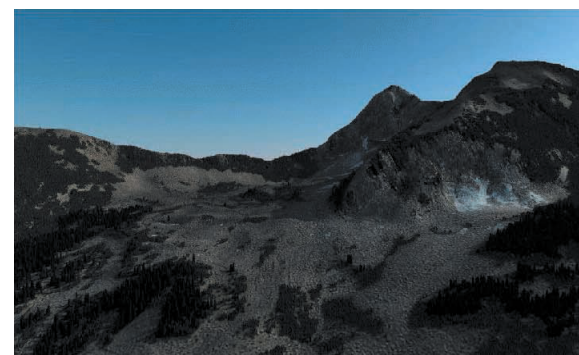
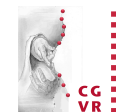


$T'$

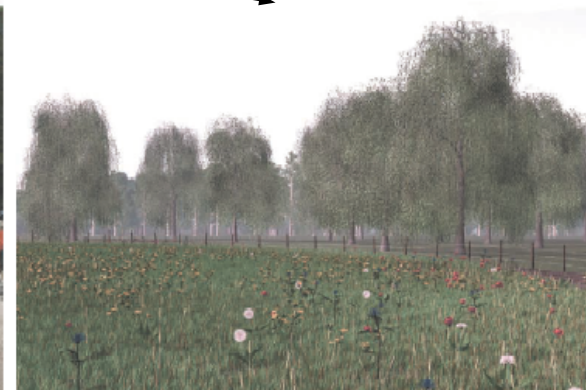




# Beispiele

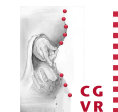


jetzt mit "dramatischem" Effekt





# Integration computer-generierter Bilder in natürliche Aufnahmen



unkorrigiert



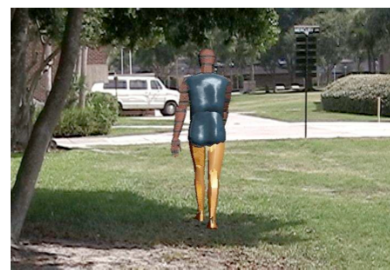
korrigiert



unkorrigiert

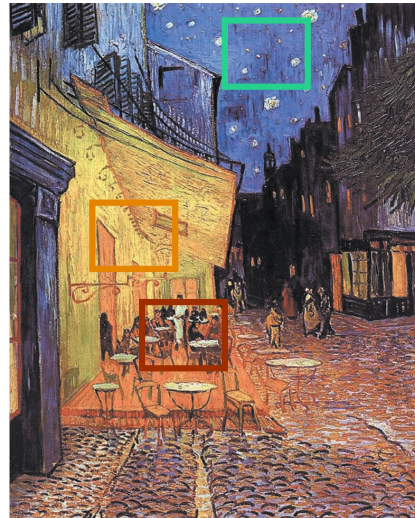


korrigiert



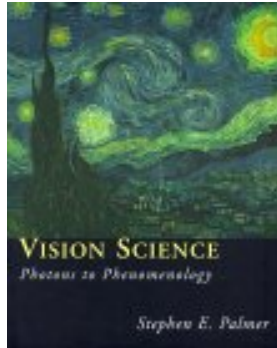


- Probleme bei stark unterschiedlichen Bildern (s.u.)
- Bilder in sinnvolle Bereiche aufteilen (Cluster hier: Himmel, Waende, Umgebung der Caffee-Tische/Personen)
- Color-Transfer gemäß den Statistiken der Cluster bestimmen
- Für jedes Pixel alle Transformationen durchführen und mit inversem Abstand der Pixel von Clusterzentren gewichten
- Was ist sinnvoller: Abstand im Bild oder im Farbraum?





# Selected Bibliography

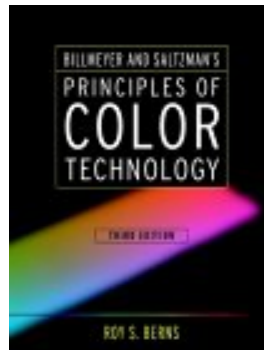


## **Vision Science**

by Stephen E. Palmer

MIT Press; ISBN: 0262161834

760 pages (May 7, 1999)

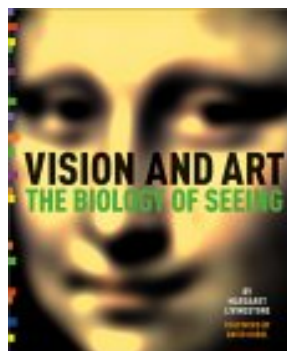


## **Billmeyer and Saltzman's Principles of Color Technology, 3rd Edition**

by Roy S. Berns, Fred W. Billmeyer, Max Saltzman

Wiley-Interscience; ISBN: 047119459X

304 pages 3 edition (March 31, 2000)

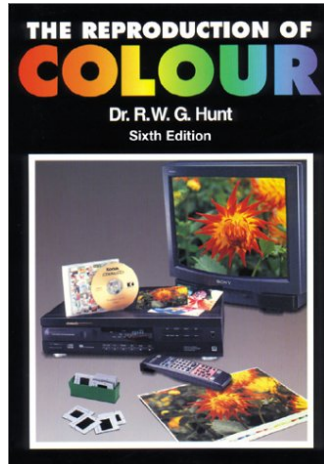


## **Vision and Art : The Biology of Seeing**

by Margaret Livingstone, David H. Hubel

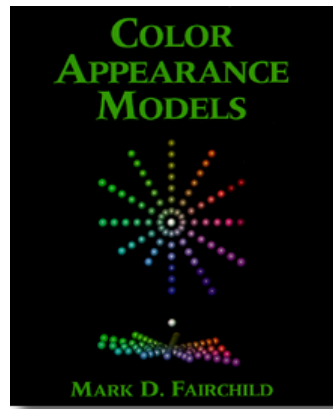
Harry N Abrams; ISBN: 0810904063

208 pages (May 2002)



## **The Reproduction of Color**

by R. W. G. Hunt  
Fountain Press, 1995

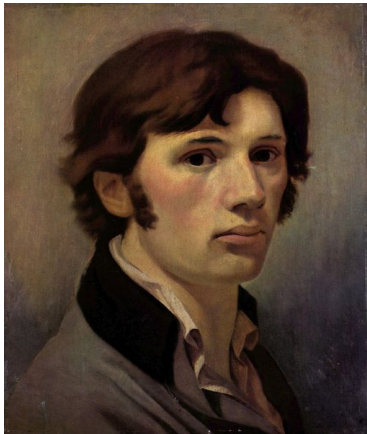
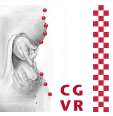


## **Color Appearance Models**

by Mark Fairchild  
Addison Wesley, 1998



# Phillip Otto Runge

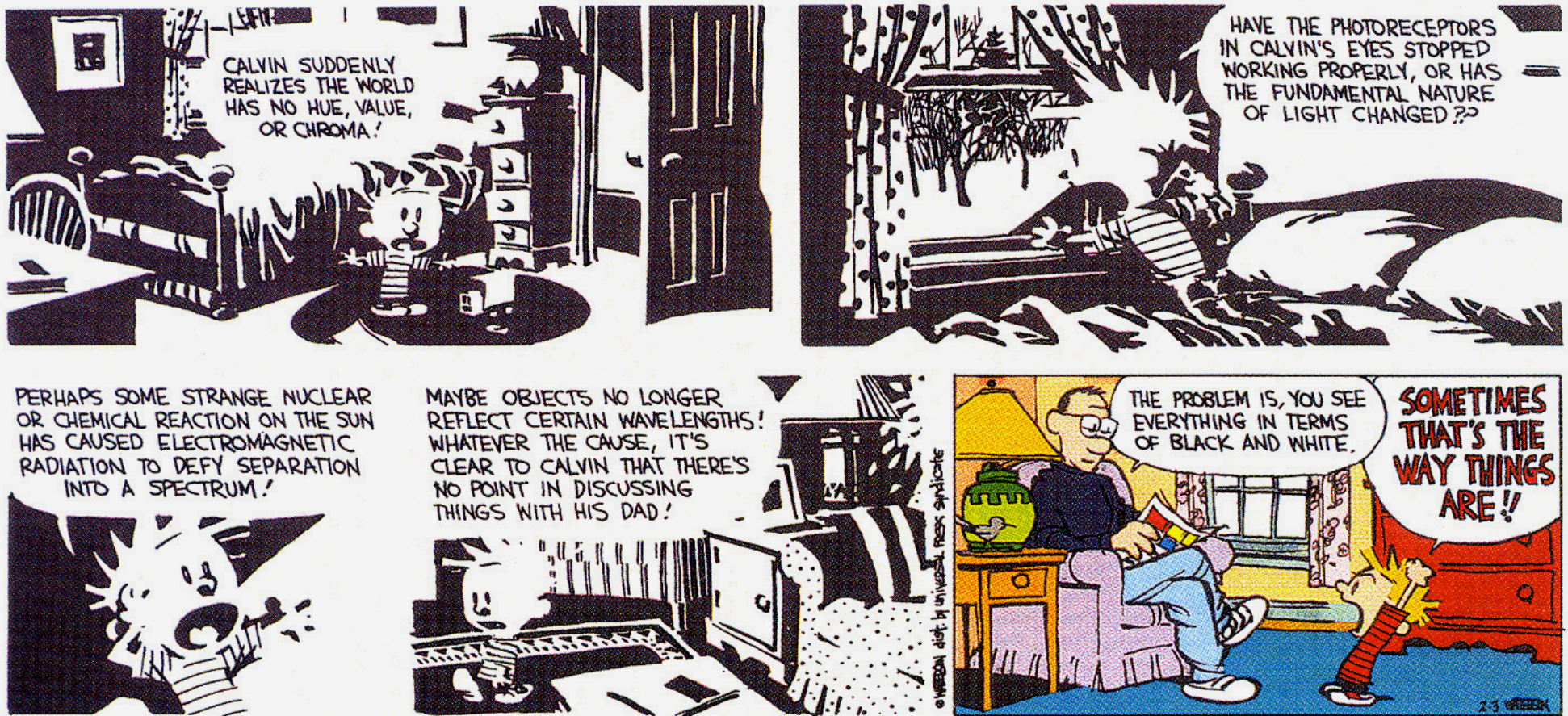


[Ph. O. Runge, *Farbenkugel*, Hamburg 1810]





# Calvin and Hobbes



CALVIN AND HOBBS © 1991 Watterson. Reprinted with permission of UNIVERSAL PRESS SYNDICATE. All rights reserved.



